

# 数学科課題学習の研究(2)

平成 4 年 8 月

徳島県中学校教育研究会数学部会

香 川 朗

## ま え が き

今日の世界情勢を見るにつけ、教育がいかに大切かをしみじみと感ぜさせられます。長期的展望に立って、地球の立場で物を見る必要があります。そして地球の資源は有限であること、自然の法則を無視しては、私たちは生き延びられないことを充分自覚しなければなりません。

好むと好まざるにかかわらず、国際人としての感覚を持ち、人類愛に目覚めなければこれからの日本は成り立たないと思います。ここで二十一世紀を生き抜く人づくりのために、私たち教師は従来の既成概念から脱皮し、新しい道を模索し、それを堅実なものにしてゆく使命感を持つよう社会から要請されています。

いよいよ中学校も平成5年度から、新学習指導要領にもとづき全面实施されることになりました。ソ連のスプートニークが宇宙に飛んで、アメリカが大あわてになって、数学の現代化を叫んだことは、もはや忘却の彼方に行ってしまいました。しかし、教育課程は社会の変化に対応して、その都度手直しされてきました。今回は豊かな心をもち、たくましく生きる人間の育成を図り、自ら学ぶ意欲と、社会の変化に、主体的に対応できる能力の育成を重視し、国民として必要とされる、基礎、基本的な内容を重視し、個性を生かす教育の充実を図ることとなりました。

数学の内容については、ある程度体系化され、大きな変化はなくなりましたが、その取り扱いが大切になってきました。

こうした中で、新指導要領に示された、課題学習に焦点をあて、本県数学教師の組織と情熱で、この研究に取り組み、平成3年8月、とりあえず課題学習の在り方、その実例を示す研究誌を皆様にお届け出来たことは、一つの進歩でありました。県内はもとより、全国関係各方面から注目をいただいたことは喜ばしいことであります。

そのことに力を得て、更に一年間、実践を積み上げ、良く検討し、ここに第二集にあたる改訂版を出すことが出来ました。研究員一同、会員の皆様のご協力に感謝しつつ、その足跡を感慨深く振り返っているところです。

ここに掲げる課題は、

- ① 実際に生徒に学習させてみた実例である。
- ② 課題を解くために、どんな基礎、基本の学習が必要であるか。
- ③ 一つの課題から、生徒の習熟度に応じて、多くの発展的な物の見方、考え方ができるような教材を選ぶ。

以上の点に観点を置き研究を重ねてきました。

オリジナルなものをつくることを目標にしましたが、なかなか困難で、一部応用問題になっているものもありますが、お許しください。

一つの課題を研究し始めると、その深さに驚き、時間のたつのも忘れて論議したことが懐かしく思い出されます。遠隔の地より土曜日ごとに馳せ参じてくださった研究員の方々の御苦勞には、ただただ頭の下がる思いです。この営みが大きく輪をひろげる糧となることを祈っています。

平成4年8月

徳島県中学校教育研究会数学部会

会長 乾 格

# 目 次

## < 2 年 >

|   |                  |          |       |    |
|---|------------------|----------|-------|----|
| 1 | 折り紙の中に数学を見つけてみよう | 徳島市徳島中学校 | 大宅 文子 | 1  |
| 2 | 立方体の個数を求めよう      | 徳島市八万中学校 | 横山 るみ | 3  |
| 3 | 正多角形テセレーション      | 鳴門市第一中学校 | 大下 経幸 | 5  |
| 4 | 包装時間を短縮する法       | 美馬郡一字中学校 | 西原 芳人 | 7  |
| 5 | 直方体とらせん          | 三好郡山城中学校 | 佐藤英一郎 | 9  |
| 6 | 長方形の中にできる三角形の面積  | 阿波郡市場中学校 | 山野井貴子 | 11 |

## < 3 年 >

|   |                      |            |       |    |
|---|----------------------|------------|-------|----|
| 1 | ビリヤードの玉の軌跡Ⅱ（三平方の定理）  | 海部郡牟岐中学校   | 猪谷 正治 | 13 |
| 2 | 自転車のペダルを踏んでみよう       | 徳島市城西中学校   | 笹川由美子 | 15 |
| 3 | 鉛筆の芯（相似な図形の計量）       | 名西郡上分中学校   | 川尻 隆之 | 17 |
| 4 | 格子多角形の面積             | 麻植郡鴨島東中学校  | 仁木島康文 | 19 |
| 5 | 三角形の面積               | 徳島市城東中学校   | 熊本 隆彦 | 21 |
| 6 | 部屋割り論法（ディリクレの原理）を知ろう | 小松島市小松島中学校 | 米山 肇  | 23 |
| 7 | 三山くずし                | 那賀郡木沢中学校   | 宮田 和代 | 25 |

# 題 材 折り紙の中に，数学を見つけてみよう（2年）

## 指導計画

- |                                      |      |
|--------------------------------------|------|
| (1) 式の加法・減法                          | 4 時間 |
| (2) 式の乗法・除法                          | 4 時間 |
| (3) 文字式の利用                           | 3 時間 |
| (4) 2進法などの記数法・ $a \times 10^n$ の形の表現 | 1 時間 |
| (5) 課題学習（折り紙の中に，数学を見つけてみよう）          | 1 時間 |

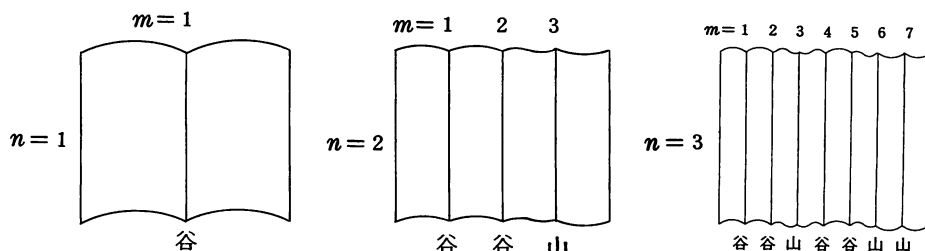
## 目 標

折り紙をすると，山折り，谷折りができるが，そこに，規則性があることに気づき，2進法で証明できることを知る。

## 授業展開

### 課 題

折り紙の左端を固定して，そこに右端が重なるように，手前に手前にと， $n$ 回折りたたむ。それを開くと， $2^n - 1$ 本の折り目ができているが，左から数えて $m$ 番目の折り目が，山折りなのか谷折りなのかを示す式を考えてみよう。



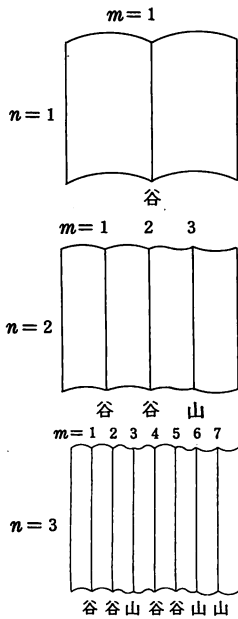
### <課題のねらい及び指導上の留意点>

文字式の利用で「 $10a + b$ 」の形の問題，2進法などの記数法， $a \times 10^n$ の形の表現を学習した後に行い，折り紙をする時にできる山折り，谷折りを，2進法の考えを使って説明できることを知る。事象の中に数量の関係を見出し，それを文字を用いて式に表現し，式に対する見方を深めたり，式によって思考をすすめたりすることで，身近な事象の中の，数学のもつ，おもしろさ，不思議さを体験させる。

指導の過程で，場合分けして考える必要があるが，新しい折り目と，先にある折り目に分けて考えてみると，規則性をみつけやすいことを示してやるとよい。

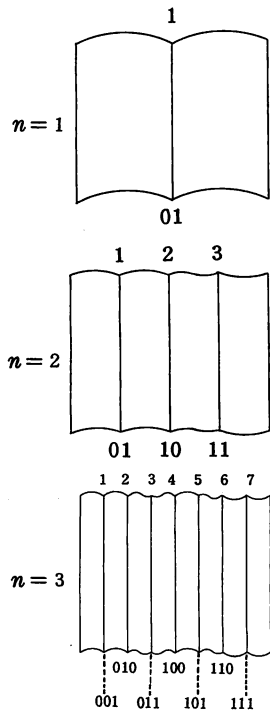
＜指導の流れ＞

- 1 課題を提示する。
- 2 自分の力で課題を解決させる。
- 3 見つけた規則性を発表させる。



- 〔期待される反応として次のことが、予想できる〕
- ◎  $m$ 番目の折り目が、山折りか谷折りかは、折った回数には関係しない。
  - ◎ 新しい折り目は、左から、谷折り山折りを繰り返す。
  - ◎ まん中の折り目（谷折り）を境にして、左右の折り目のパターンが、裏返しになっている。
  - ◎  $n$ 回折った後で、折り紙の左半分に注目すると、幅は半分になっているが、 $(n-1)$ 回と同じ折り方になっている。

- 4 2進法を使って説明できることを知らせ、考え、発表させる。



- 1回目は谷折り
- 2回目の折り方から考えてみると、  
 $m=1, 2, 3$ を2進数で表すと  
01, 10, 11  
(谷, 谷, 山)となる。
- 3回目は、2回目と対比させて考えてみる。  
新しい折り目（奇数番目）で考えると、2進数で表した最後の2桁だけを注目すると、01, 11, 01, 11を繰り返すので、01が谷折り、11が山折りに対応する。
- 2進数表現のおしりの0は関係なく、右からみていって、最初の1が、その折り目の誕生の瞬間に対応していて、その瞬間に、その1の次の位が0か1かに応じて、左から、谷折り山折りが誕生していく。

(大宅 文子)

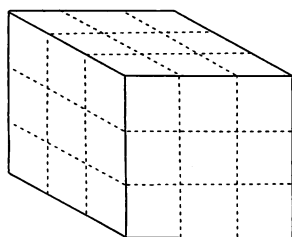
## 題 材 立方体の個数を求めよう（2年）

|         |                            |      |
|---------|----------------------------|------|
| 指 導 計 画 | (1) 式の加法・減法……………           | 4 時間 |
|         | (2) 式の乗法・除法……………           | 4 時間 |
|         | (3) 文字式の利用……………            | 3 時間 |
|         | (4) 課題学習（立方体の個数を求めよう）…………… | 1 時間 |
|         | (5) 問 題……………               | 2 時間 |

- 目 標
- (1) 目に見えない部分の様子を推測し、各個数を予測することができる。
  - (2) 各個数の規則性を見つけ出し、その関係を式に表すことができる。

## 授 業 展 開

### 課 題



表面をすべて赤くぬられた立方体があります。この立方体の各辺を三等分し、小さな立方体に分けると、

- 三面が赤くぬられている立方体……………（3面）
- 二面が赤くぬられている立方体……………（2面）
- 一面だけ赤くぬられている立方体……………（1面）
- 一面もぬられていない立方体……………（0面）

は、それぞれ何個ありますか。

また、一辺を二等分した時はどのようにになっていますか。

四等分、五等分……というふうに考えていくと、各々の個数はどのように変わっていきますか。

### <課題のねらい及び指導上の留意点>

本課題は立方体という単純な形であるため、イメージをつかみやすく、生徒たちにとっても取りかきやすい課題ではないかと考えられる。しかし、目に見えない部分があるという点では、難しく感じる生徒がいるかもしれない。そこで、立方体の切り方を1つずつ増やしていった、帰納的にそれぞれの増え方を考察することにより、その規則性を見つけさせたり、立方体との関係に気づかせたい。各項目の表を作りながら、数値間の関係をつかむ生徒もいるだろうと予想できるが、もし少なければ、模型を渡して、立体の構造の各個数の関係を発見させたい。そして、どちらの考え方からも文字式が作れることを理解させ、文字の式が、数量や数量の間の関係を一般的かつ簡潔に表現する方法として効率的であることを認識させたい。さらに、事象を数理的に考察する能力を養い、数学的な見方、考え方のよさを知らせる手がかりになればと願う。

### <指導の流れ>

- 3等分したとき、それぞれ何個になるかを具体的に考えさせる。
- 2等分したときも同様に考えさせる。このとき頂点の数だけ（3面）があることが予想できる

であろう。

- 3等分, 2等分を全員で考えさせたあと, 4~7等分は各自で考えさせ, 表に記入させる。

※具体的に数える範囲を越えたらどうしたらよいかを意識させながら表を完成させる。

- 表を完成させてから, 一般化をする。

〔例Ⅰ〕〔全個数〕 • (1段の個数) × (段の数)

$$\downarrow$$

$$\bullet (1 \text{ 辺の個数})^3 \longrightarrow n^3$$

〔3 面〕 • 立方体の頂点の数  $\longrightarrow 8$

$$\begin{array}{c} \text{上段と下段} \quad \quad \quad \text{中段} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

〔2 面〕 • (等分数-両端) × 4 × 2 + 4 × (段の数-上下段)

$$\downarrow$$

$$\bullet (\text{等分数}-\text{両端}) \times (\text{辺の数}) \longrightarrow (n-2) \times 12$$

$$\begin{array}{c} \text{上段と下段} \quad \quad \quad \text{中段} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

〔1 面〕 • (等分数-両端)<sup>2</sup> × 2 + (等分数-両端) × 4 × (段の数-上下段)

$$\downarrow$$

$$\bullet (\text{等分数}-\text{両端})^2 \times (\text{面の数}) \longrightarrow (n-2)^2 \times 6$$

〔0 面〕 • (全個数) - (3面+2面+1面)

$$\bullet (\text{等分数}-\text{両端})^3 \longrightarrow (n-2)^3$$

〔例Ⅱ〕

|   | 3 面 | 2 面                | 1 面                 | 0 面         | 全個数         |
|---|-----|--------------------|---------------------|-------------|-------------|
| 2 | 8   | 0                  | 0                   | 0           | $8 = 2^3$   |
| 3 | 8   | $12 = 12 \times 1$ | $6 = 6 \times 1$    | $1 = 1$     | $27 = 3^3$  |
| 4 | 8   | $24 = 12 \times 2$ | $24 = 6 \times 4$   | $8 = 2^3$   | $64 = 4^3$  |
| 5 | 8   | $36 = 12 \times 3$ | $54 = 6 \times 9$   | $27 = 3^3$  | $125 = 5^3$ |
| 6 | 8   | $48 = 12 \times 4$ | $96 = 6 \times 16$  | $64 = 4^3$  | $216 = 6^3$ |
| 7 | 8   | $60 = 12 \times 5$ | $150 = 6 \times 25$ | $125 = 5^3$ | $343 = 7^3$ |
| ⋮ | ⋮   |                    |                     |             | ⋮           |
| n | 8   | $12 \times (n-2)$  | $6 \times (n-2)^2$  | $(n-2)^3$   | $n^3$       |

〔例Ⅰ〕のように立体の構造をふまえた言葉の式から文字の式を作ることできるし, 〔例Ⅱ〕の表のように, 数の並び方から文字の式を推測することもできる。自由に考えさせることにより, 発想の広がりを期待したい。

(横山 るみ)

## 題 材 正多角形テセレーション(2年)

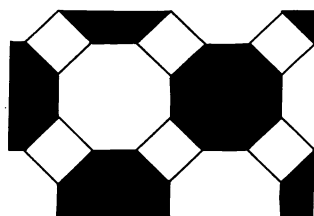
指導計画 図形と相似学習後…………… 1 時間

- 目 標
- (1) テセレーションの意味を理解し、それらに共通している特徴を見いだし、自分の力で、3個の正多角形が並ぶテセレーションをつくりだす。
  - (2) テセレーション作成過程で、数学的な考え方や態度の育成を図り、既習の数学を活用するよさを理解する。

### 指導の実際

#### 課 題

右のようないくつかのテセレーションを観察し、それらに共通している特徴を見いだし、それらを参考にして、3個の正多角形が並ぶテセレーションをできるだけたくさんつくろう。



#### <課題のねらい及び指導上の留意点>

ここで取り上げる題材はテセレーションというものである。平面上に1種類あるいはそれ以上の合同な図形を使って重なりや隙間がなく敷き詰めてできたものをいう。

テセレーションはいろいろな建物の壁や床に使われているのでいつもみているものである。本時は、これを数学の目でとらえて学習の対象にしようとするものである。

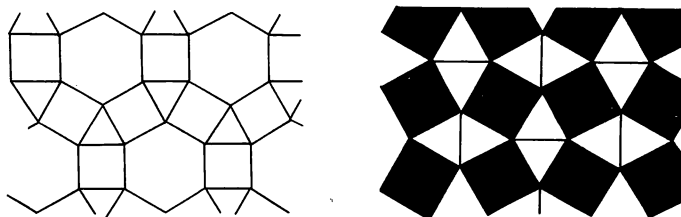
生徒は、上のようないくつかのテセレーションを観察し、それらに共通している特徴を見いだすわけであるが、その解決過程において、数学的な考え方や態度の育成を図り、既習の数学を活用するよさを理解させることが本時のねらいである。

また、解決に向けての方法については、個々の生徒の考え方をできるだけ生かすようにする。教師は、生徒の活動を援助し、活動がスムーズに運ぶような手だてを準備しておく必要がある。

#### <指導の流れ>

##### 1 課題把握

テセレーションの例を観察することにより、テセレーションを理解し、その特徴を見いだすことができる。図を観察し、課題の意味を具体的に把握する。



## 2 計画をたてる

解決の見通しをたて、それに必要な既習内容を復習する。

見通しの立たない生徒には、上のテセレーションに共通な性質が利用できないか考えさせる。

1 点の周りに和が  $360^\circ$  になる三つの正多角形を集めればよいことに気付かせる。

## 3 テセレーションをつくる

解決方法として次の二通りが予想される。

- (1) 個々の正多角形の内角の大きさを知り、それらを使って和が  $360^\circ$  になる三つの正多角形を選ぶ。

正  $n$  角形の一つの内角

| $n$ | 3  | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11 | 12 |  |
|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|--|
| 内 角 | 60 | 90 | 108 | 120 | 128 | 135 | 140 | 144 |    |    |  |

- (2) 文字式を利用して、三つの正多角形の組を選ぶ。

三つの正多角形の辺の数を、それぞれ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  とする。

$x$ ,  $y$ ,  $z$  は共に 3 以上の整数,  $x \leq y \leq z$  とすると,  $x$  は 6 以下の整数

辺の数を,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  とすると,

内角を利用

$$\frac{180(x-2)}{x} + \frac{180(y-2)}{y} + \frac{180(z-2)}{z} = 360$$

外角を利用

$$180 - \frac{360}{x} + 180 - \frac{360}{y} + 180 - \frac{360}{z} = 360$$

どちらも、簡単にすると  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

正多角形の組み合わせ

| $x$ | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | 4  | 4  | 4 | 5  | 6 |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|---|
| $y$ | 7  | 8  | 9  | 10 | 12 | 5  | 6  | 8 | 5  | 6 |
| $z$ | 42 | 24 | 18 | 15 | 12 | 20 | 12 | 8 | 10 | 6 |

## 4 結果と検討

求め方とその結果について全員で検討する。

(発展課題)

1 点の周りに 3 個の正多角形が並ぶテセレーションを求めたが、4 個、5 個の場合についても考えてみる。

(大下 経幸)

**題 材**
 包装時間を短縮する法（2年）

|                |                               |
|----------------|-------------------------------|
| <b>指 導 計 画</b> | 式の計算                          |
|                | (1) 式の加法・減法..... 4時間          |
|                | (2) 式の乗法・除法..... 4時間          |
|                | (3) 課題学習（包装時間を短縮する法）..... 1時間 |
|                | (4) 文字式の利用..... 3時間           |

|            |                                                         |
|------------|---------------------------------------------------------|
| <b>目 標</b> | (1) 現代社会で数学的思考方がどのように使われているかを知り、数学的な見方や考え方の良さに気づくようにする。 |
|            | (2) 線分図を使った数量処理の仕方に慣れるようにする。                            |

**授 業 展 開**

**課 題**

デパートの花器売場に来たお客が、鉄製、竹製、セトモノ製とガラス製の花器を1つずつ買いました。

店員はそれぞれを箱づめし、包装してお客に渡すのですが、ここには箱づめ係1人、包装係1人で流れ作業的に仕事をします。

箱づめ、包装にはそれぞれ右の表のように時間がかかりますが、花器を包む順をどのようにしたら、一番早く仕事が片づくでしょうか。

| 種類 \ 係  | 箱づめ係 | 包 装 係 |
|---------|------|-------|
| 鉄 製     | 3分   | 9分    |
| 竹 製     | 5分   | 5分    |
| セトモノ製   | 8分   | 4分    |
| ガ ラ ス 製 | 12分  | 6分    |

<課題のねらい及び指導上の留意点>

数学的な見方や考え方は、合理的に物事を考えることでもあり、それは日常生活で多く用いられている。しかし、生徒たちはどのような場面で、どう使われているか気づかないことが多い。

そこで、日常の事象であるデパートの包装作業を例にして、短時間に能率よくする方法をさまざまな場合で考えさせ発見することにより、数学的な見方や考え方のすばらしさを味わわせたい。

また、文字の式で表したり解くには、文章の内容を図に表現する力が前提能力として必要である。図に表現する力が十分身につけていない者は、文章問題などにいきづまりを見せる。

この課題を通して、思考力や処理能力を高めることができるのではないか。そして、それは式の計算などの応用問題を解く準備段階として有効だと思う。

鉄、竹、セトモノ、ガラス4種類のものの順序を考えた組は、 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 、24種類。これらを1人がすべて調べるのはたいへんなので、最初に箱づめする品物を分けて考えさせる。

そして、最初の箱づめから、最後の包装の終了までを時間の尺度で線分図に表す。包装は品物が箱づめされてからの仕事なので、線がとぎれとぎれになることに注意させる。

<指導の流れ>

1 課題を提示する。

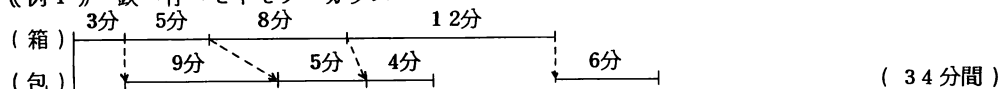
- (1) 箱づめをする順番によって何通りに分けられるか考えさせる。
- (2) 最初に箱づめする品物を班ごとにかえて考えさせる。
- (3) 考えを鮮明にするために線分図を使って考えるようにさせる。

2 結果を予想させる。

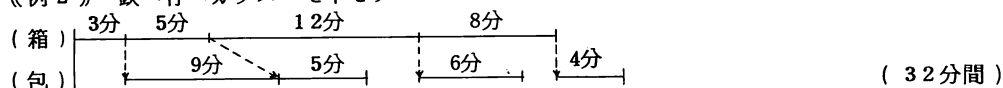
- 箱づめ係の方は、待ち時間はないので、どんな順番でやっても28分間かかる。
- 全体として早く終わるためには、包装係の切り上げが早ければいい。
- 箱づめ係の方は一番時間のかかるものを最初にやった方がいいのでは。

3 自分の力で課題を解決させる。

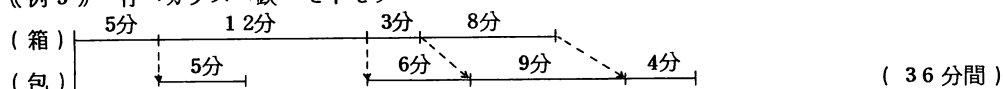
《例1》 鉄→竹→セトモノ→ガラス



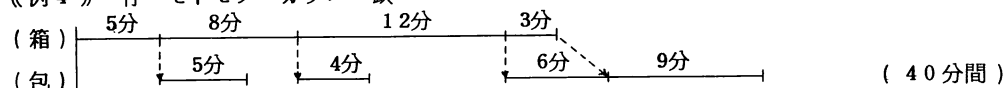
《例2》 鉄→竹→ガラス→セトモノ



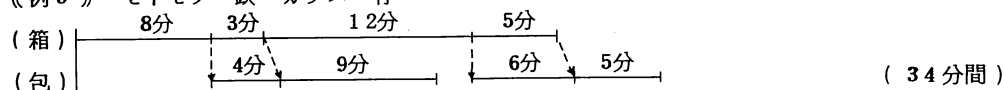
《例3》 竹→ガラス→鉄→セトモノ



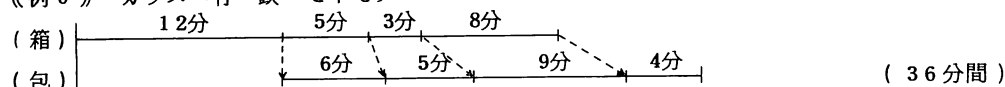
《例4》 竹→セトモノ→ガラス→鉄



《例5》 セトモノ→鉄→ガラス→竹



《例6》 ガラス→竹→鉄→セトモノ



4 結果を発表させる。

- 最小時間は、32分間で、最大時間は、40分間。

5 本時のまとめ

本時の学習は現代の社会でよく用いられるオペレーション・リサーチ (O.R.) と呼ばれるもので、最小の努力で最大の効果を収める考え方である。数学の見方、考え方が社会のいろいろの分野で活用されていることを知らせる。

出典：ディズニーランドで数学しよう 仲田紀夫著 黎明書房 P88～P91

(西原 芳人)

## 題 材 直方体とらせん（２年）

### 指 導 計 画 図 形 と 相 似

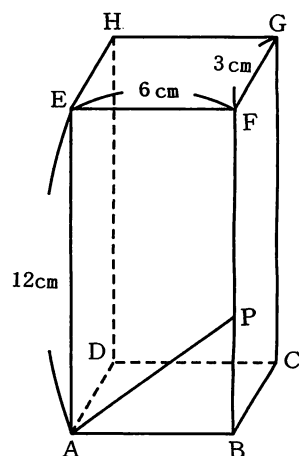
- (1) 拡大・縮小と相似…………… 3 時間
- (2) 相似条件と証明…………… 2 時間
- (3) 平行線と線分の比…………… ( 本時は $\frac{4}{5}$  ) 5 時間
- (4) 中点についての定理…………… 4 時間
- (5) 問 題…………… 2 時間

- 目 標
- (1) らせんの傾きを変えると、らせんの巻き方がいろいろと変化することをつかまえさせる。
  - (2) 直方体におけるらせんは、直方体の側面を展開して考えると、わかりやすく処理しやすいことに気づかせる。

### 授 業 展 開

#### 課 題

右の図のような直方体 $ABCD=EFGH$ がある。点 $P$ は $BF$ 上を動くものとするとき、点 $A$ を出発点として点 $P$ を通り、そのまま傾きを変えずに直方体の側面に沿ってらせんを描いていく。このとき、点 $P$ の位置を上下に変えることによって、らせんの様子はどのように変わるか。また、らせんが直方体の側面に沿って何周か回って点 $E$ の地点まで達したときの点 $P$ の位置を調べてみよう。



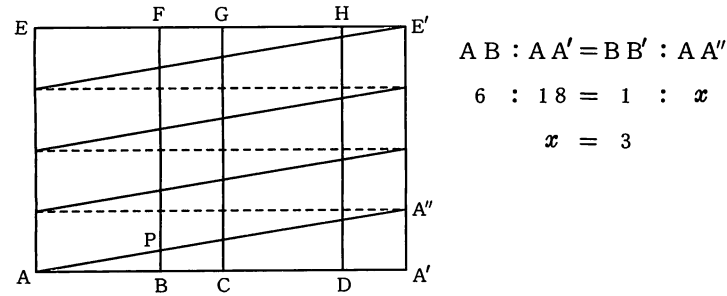
#### <課題のねらい及び指導上の留意点>

円柱におけるらせんの問題は、よく見かけるが、本課題の方がイメージ化しやすいのではないだろうか。また、らせんを描く本体を立方体にせずに、図のような直方体にしたのは、立方体だと直感的に問題を処理してしまい、イメージをふくらませる間がなくなってしまう。直方体だと、生徒にあれこれと試行錯誤する過程が生まれ、解決への意欲が出てくると思われる。

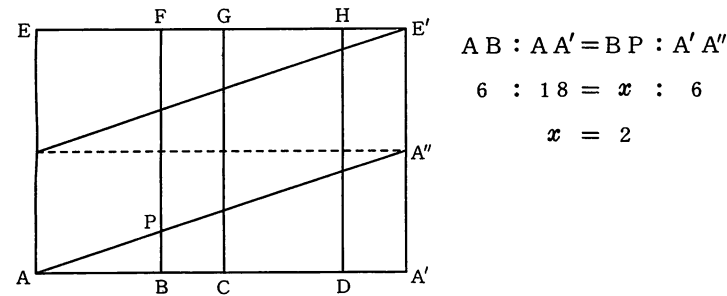
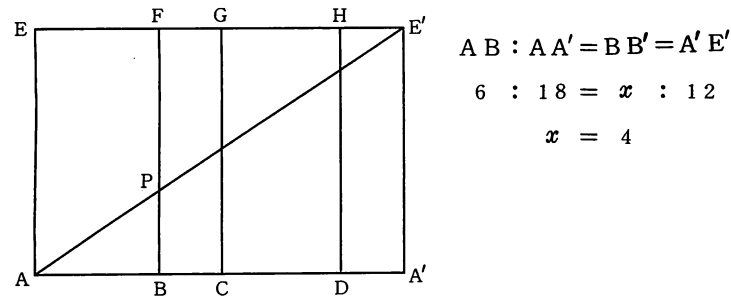
さらに、本課題は、1 次関数を指導した後の図形と相似の中で学習するので、らせんのイメージが湧きやすく、学習にはとけこみやすいであろう。

＜指導の流れ＞

- 1 課題を提示する。  
らせんをイメージさせて、課題解決に向かわせる。
- 2 点Pの位置を上下に変えると、らせんがどうなるか考える。  
上にやればらせんが短くなり、下にやれば長くなる。
- 3 点PがBFの中点にあるとき、らせんがどのように描かれるか考える。  
らせんの最後がどこに来るか、指摘させる。  
見取り図や側面の展開図を利用させる。
- 4 点PがBP＝1cmの位置にあるとき、らせんがどうなるか考える。



- 5 らせんが1周するときや2周するときのPの位置を求めよ。



- 6 課題を解決し、本時のまとめをする。

( 佐藤 英一郎 )

## 題 材 長方形の中にできる三角形の面積（２年）

### 指 導 計 画 図形と相似学習後

- (1) 三角形の中にできる三角形の面積…………… 1 時間
- (2) 長方形の中にできる三角形の面積…………… 1 時間

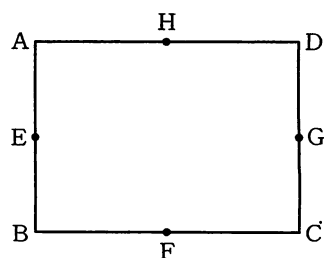
- 目 標
- (1) 長方形の頂点と各辺の中点を結んで三角形をつくり、その面積を求めることができる。
  - (2) 進んで問題を見つけ、その解決のために既習事項を積極的に活用することができる。

### 授 業 展 開

#### 課 題

長方形  $ABCD$  の頂点と  $E, F, G, H$  の各点を結ぶと、いろいろな三角形ができる。それぞれの三角形の面積は、どの長方形の面積の何分のいくつになるか。

図をかくて調べよ。



#### <課題のねらい及び指導上の留意点>

この課題のよさは、生徒一人一人が各自の興味・関心・能力に応じて問題を設定できるところにある。また、三角形の相似、三角形の重心、平行線と比、中点連結定理などを利用することにより、多様な方法で求めることができる。

最終目標は、最小の三角形の求積である。しかし、最初から小さい三角形に着目しても、その求積は困難である。考察の対象を、大きな三角形から小さな三角形へと移行していくことが課題を解決する鍵である。手当たり次第に追求するのではなく、順序よく調べることの大切さを実感させたい。また、単に三角形の面積を求めるだけでなく、図形のもっている美しさも鑑賞させたい。

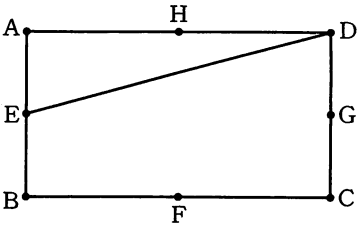
#### <指導の流れ>

##### 1 課題の提示

点  $A, H$  以外の点は結ばないように注意をしておく。

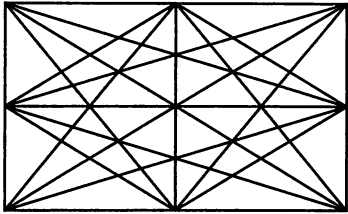
2 問題設定の見直し

「面積がすぐわかる三角形，例えば△AEDよりもっと小さい三角形をつくるためには，どの点とどの点を結べばよいか。」という発問をする。この発問は，既知の三角形を分割すれば問題が次々と設定できることの意識づけをねらったものである。



3 問題の自己設定と解決

- ・各自でつくった三角形の面積を求めさせる。
- ・最終目標は，最小の三角形の求積である。そこで，点A，Hを結んだ右図をプリントにかかせ，最小と思われる三角形を視野に入れて追求するよう助言を与える。

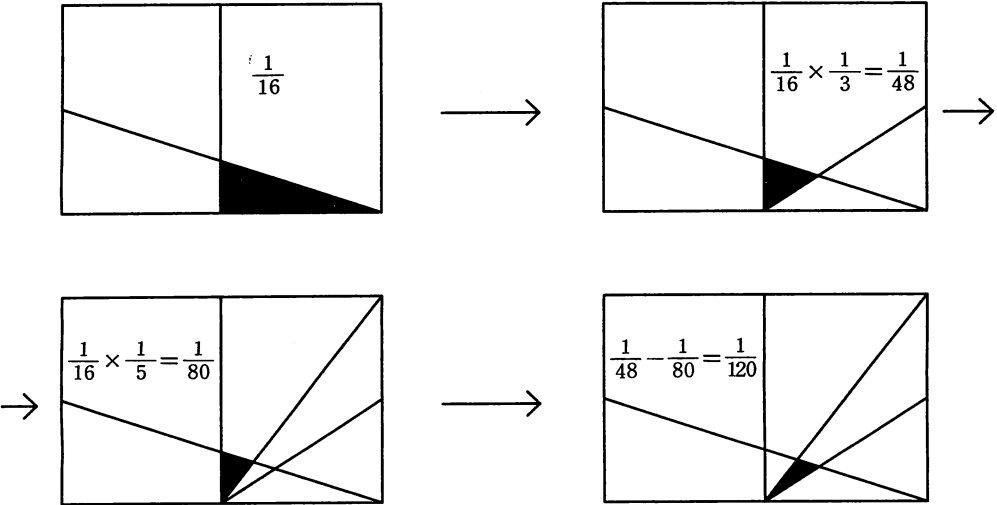


図－1

4 発表・まとめ

- ・図－1をかいた模造紙を黒板に貼り，代表の生徒に発表させる。その際，生徒が見つけた最小の三角形に色ぬりをする。
- ・平行線と面積の関係や，図－2の考え方をを用いると，最小の三角形が次々と見つかること，その三角形が規則的に16個並ぶこと，などを確認する。

<解決例>



図－2

5 発展課題の提示

三等分点の場合も考えさせる。

(山野井 貴子)

課 題      ビリヤードの玉の軌跡Ⅱ（三平方の定理）（3年）

指 導 計 画      三平方の定理

- (1) 三平方の定理…………… 5 時間
- (2) 三平方の定理の利用…………… 6 時間
- (3) 問      題…………… 2 時間
- (4) 課題学習（ビリヤードの玉の軌跡）…………… 1 時間

- 目      標
- (1) 三平方の定理の理解を深め、利用する。
  - (2) これまでに学習してきた知識を三平方の定理と結びつけ問題を解決する。
  - (3) 自らが課題を広め設定し、解決する。

授 業 展 開

課 題

右の図のようなビリヤード台がある。今、点Pの玉を突いて点Qの玉に当てたい。Pの動いた軌跡を作図し、動いた距離を求めなさい。ただし、側面に当たった玉は正しく反射するものとする。また、1目盛り1cmとし、玉の大きさは考えないものとする。

- (1) PからQに直接当てる場合。
- (2) B面で反射させてから当てる場合。
- (3) (1)(2)以外の場合を考えてみる。

<課題のねらい及び指導上の留意点>

この課題は、三平方の定理の2点間の距離の応用として考えたものである。昨年度もビリヤードの軌跡として提案させていただいたが、生徒には唐突すぎて取り組みにくかったようである。そこで、今回も機会を得たので前回の課題の準備課題として、より具体的な課題としてみた。

ねらいとしては、前回同様一つの解法にとらわれることなく既習の知識を組み合わせでさまざまな解き方ができることを理解させるとともに、生徒自らが課題を設定し解くことができることをねらいとした。

留意点としては、課題を提示する場合グラフ用紙を用いた方が作図等考えやすい。また、小学校で習っている反射について十分に復習しておくことが必要である。

<指導の流れ>

- 1 課題を提示する。

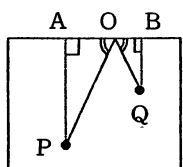
## 2 反射について説明する。

### ① 入射角と反射角が

等しいため、

$$\triangle APO \sim \triangle BQO$$

となる。



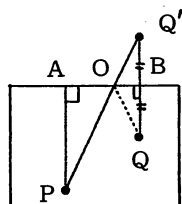
### ② 線対称の考え方を利用

することにより

$QB = Q'B$  となる点  $Q'$

を求めると

$$PQ' = PO + OQ \text{ となる。}$$



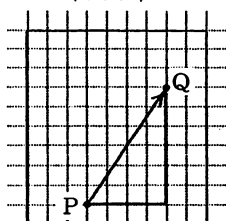
## 3 各自で課題を解決していく。

### (1)の解答例 (図1)

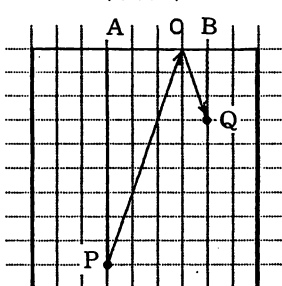
$\triangle PQR$  について三平方の定理を用いる。

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{4^2 + 6^2} \\ &= 2\sqrt{13} \text{ cm} \end{aligned}$$

(図1)



(図2)



### (2)の解答例

#### ① 相似形を使う場合 (図2)

$\triangle PAO \sim \triangle QBO$  になるため  $PA:QB = 3:1$  を用い、

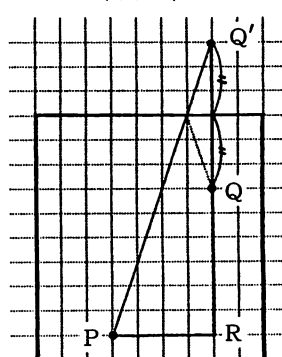
$AB$  を  $3:1$  に分ける点  $O$  を見つけると  $AO = 3$ ,  $BO = 1$  と

なりそれぞれの三角形について三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{9^2 + 3^2} & OQ &= \sqrt{3^2 + 1^2} \\ &= 3\sqrt{10} & &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\therefore OP + OQ = 4\sqrt{10} \text{ cm}$$

(図3)



#### ② 線対称を使う場合 (図3)

$Q$  を  $B$  面について線対称移動し  $Q'$  を見つけ、 $\triangle Q'PR$  につい

て三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned} PQ' &= \sqrt{4^2 + 12^2} \\ &= 4\sqrt{10} \text{ cm} \end{aligned}$$

### (3)の解答例 (図4)

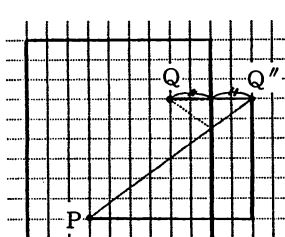
#### ① C面に反射させる場合

$$\begin{aligned} PQ'' &= \sqrt{8^2 + 6^2} \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

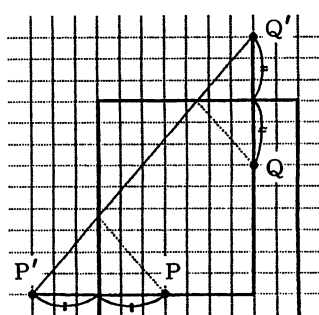
#### ② A面とB面に反射させる場合

$$\begin{aligned} P'Q' &= \sqrt{10^2 + 12^2} \\ &= 11\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

(図4-①)



(図4-②)



#### ③ ①②以外にも、C面とA

面に反射させるなど様々な場合が考えられる。

## 4 結果を発表させる。

取り組んでいる途中で異なった考え方や解き方の生徒に発表させ、他の生徒の考え方が広がるようにする。

(猪谷 正治)

題 材 自転車のペダルを踏んでみよう（３年）

指導計画 三平方の定理学習後…………… １時間

- 目 標
- (1) 具体的事象の中から，自ら課題を見だし，解決する。
  - (2) 日常生活の事象の中からいろいろと数学的な考え方ができるということを知る。

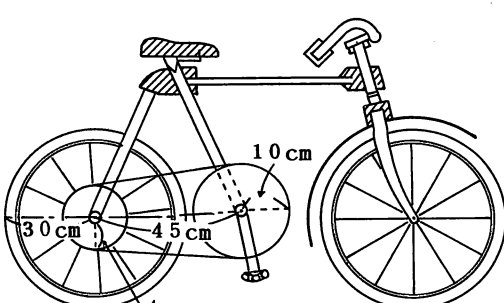
授業展開

課 題

右の図のような自転車がある。

|                    |       |
|--------------------|-------|
| 大ギアの半径             | 10 cm |
| 小ギアの半径             | 4 cm  |
| 後輪の半径              | 30 cm |
| 大ギア・小ギアそれぞれの中心間の距離 | 45 cm |

この自転車から数学的な課題を見つけよう。



<課題のねらい及び指導上の留意点>

生徒のほとんどが乗っている自転車。変速ギアで，ギアを変えると自転車のペダルが重くなったり，軽くなったりするのはなぜだろうか。また，ペダルが重くなれば進む距離が長くなり，ペダルが軽くなれば距離が短くなるのはどうしてだろうか。このような疑問を生徒になげかけ，生徒全員が興味をもって意欲的に取り組めるように，日常生活に密接な本課題を取り上げてみた。そして，これは三平方の定理の学習後，総合学習として利用したいと思っている。

実物大の自転車の図を示し，その時に大ギアとペダルの関係・小ギアと後輪の関係をきちんとおさえておくことが大切である。その後，自主的に課題を見つけて，自分が身につけている学習内容で解決ができるようにしなければならない。まず，大ギア・小ギアという“円”，から考えを深めさせたい。

円 → 円周 → 比 → 距離

段階毎で“何がわかるだろうか”，と生徒と共に考えながらヒントを与え，様々な能力の生徒が自分なりに何か1つでもよいから，自分の力で解決できたかと思っている。段階が進めば，自分が乗っている自転車のチェーンに三平方の定理が生きているということ。また，ペダルの踏み方によっては関数的な考え方ができるということへと発展させられる。程度の差はあれ，それぞれの課題解決の達成感を味わうことができたなら，生徒は新たな課題を日常生活の事象の中に見い出そうとするのではないだろうか。

＜指導の流れ＞

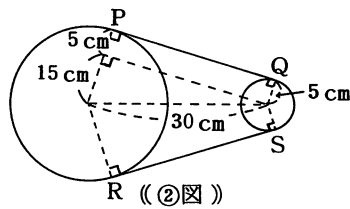
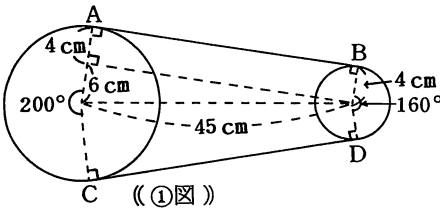
1 問題を提示する。

2 課題をみつけさせる。

ヒントを与えたり、個々に適したものであるかチェックしたりする。

〔予想される課題とヒント〕

- 大ギア・小ギアの半径から何がわかるだろうか。
  - 大ギアの周の長さ  $20\pi$  (cm)
  - 小ギアの周の長さ  $8\pi$  (cm)
  - 大ギアと小ギアの回転数の比  $5:2$
- ペダルを1回踏むと何がわかるだろうか。
  - 大ギアの回転数 1回
  - 小ギアの回転数(後輪の回転数と同じ) 2.5回
  - 進んだ距離 後輪円周×小ギアの回転数  $60\pi \times 2.5 = 15\pi$  (m)
- チェーンについてどうだろうか。次図を見て考える。



- チェーンの長さを求める。 三平方の定理の利用

〔①図〕  $AB + CD + \text{弧} AC$  (中心角  $200^\circ$  とおく)  $+ \text{弧} BD$  (中心角  $160^\circ$ )

$$2 \times \sqrt{45^2 - 6^2} + 2 \times 10 \times \frac{200}{360} + 2 \times 4 \times \frac{160}{360} \approx 103.9 \text{ (cm)}$$

〔②図〕 図のように半径・中心間の距離を変えてみる。

直角三角形で  $1:2:\sqrt{3}$  の関係より角度が求まる。弧  $PR$  の中心角は  $240^\circ$ 、  
弧  $QS$  の中心角は  $120^\circ$  となる。

$PQ + RS + \text{弧} PR + \text{弧} QS$

$$2 \times 15\sqrt{3} + 2 \times 20 \times \frac{240}{360} + 2 \times 5 \times \frac{120}{360} \approx 82.0 \text{ (cm)}$$

- チェーンのある部分に油をさし、そこからペダルを何回踏むと油がチェーン全体にいき渡るか。 チェーンの長さ÷大ギアの円周
- 時間(秒)  $x$  と距離(m)  $y$  の関係はどのようになるだろうか。

1秒に1回踏む……  $y = 1.5\pi x$

ペダルを踏まずに坂道を下る……  $y = 2.5x^2$  (比例定数を2.5とおく)

3 課題を解決させる。

- 1つの課題が解決できたら、次の課題を見つけさせる。
- つまづいた生徒がいれば適切な助言を行う。

4 結果を発表させる。

( 笹川 由美子 )

## 題 材 鉛筆の芯（相似な図形の計量）（3年）

### 指導計画

相似な図形の計量

- |                  |      |
|------------------|------|
| (1) 相似な図形の長さ     | 2 時間 |
| (2) 相似な図形の面積     | 2 時間 |
| (3) 相似な立体の表面積・体積 | 3 時間 |
| (4) 課題学習（鉛筆の芯）   | 1 時間 |
| (5) 縮図の利用        | 1 時間 |
| (6) 問 題          | 2 時間 |

### 目 標

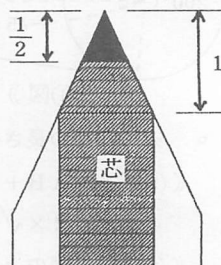
- (1) 学んだ知識を積極的に利用する。
- (2) 物事の見方・考え方の多様性を知る。

### 授業展開

#### 課 題

芯の先端が円すい形に削られた鉛筆があります。その円すい形の高さの $\frac{1}{2}$ のところまで（図の黒くぬった部分）使ったら、再び前と同じ形の円すい形になるまで削ることにします。

これを繰り返すとき、実際に書くのに使われた芯の量は失われた芯の量の何分のいくらかでしょう。



#### <課題のねらい及び指導上の留意点>

この問題は、相似な立体の体積比を使わなくても2年生の知識で解くことができる。（但し、少々難しめの文字式にはなる）が、立体の体積比を使うことによって計算の煩雑さから逃れることができる。新しい知識を導入する場合、その有用性を認識させることが知識の定着に必要なことだと思う。上記の課題を生徒に与えた場合、私は次の3つのパターンに分かれると想像する。

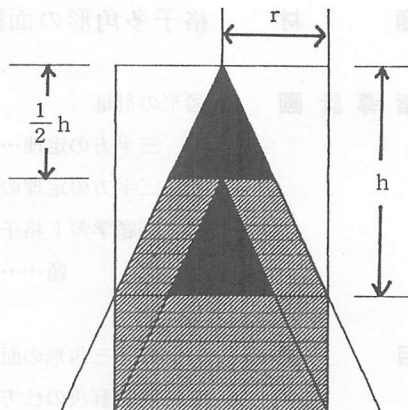
- (1) 直接、体積を計算していこうとする生徒
- (2) 体積計算と比の関係で解こうとする生徒
- (3) 比の関係だけで解決していく生徒

他にも考えられるかもしれないが、あらゆるパターンの解き方を紹介するとともに、色々な見方・考え方があることを認識させることも課題学習だと思うし、そのすべてを理解できなくても「ああ、そんな考え方もあるのか。」ということが生徒の記憶に少しでも残るならば、それも意義があるのではないかと思う。もちろん、このことは普段の授業中にも意識しておきたいことである。

<指導の流れ>

- 1 課題を提示する。
- 2 問題を考えさせ、発表させる。

図のように円柱の高さを $h$ 、底面の半径を $r$ として問題に取り組ませる。



〔考えられる解答例〕

その1 直接、体積の計算をする場合。

実際に使う芯は黒で塗った部分であり、残りはすべて無駄になる。

そこで、実際に使う芯の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left\{ \pi \times \left( \frac{1}{2} r \right)^2 \right\} \times \frac{1}{2} h \times 2 = \frac{1}{12} \pi r^2 h$$

( $\frac{1}{2} r$  は直観で答える生徒も多いと思われるので、指導が必要かも)

失われる芯の体積は

$$\pi r^2 h - \frac{1}{12} \pi r^2 h = \frac{11}{12} \pi r^2 h$$

よって、答えは、 $\frac{1}{11}$

その2 体積計算と比の関係で解く場合

大小の円すいの体積比が8:1であることを利用しようとする。

(大きな円すいの体積) : (小さな円すいの体積) = 8 : 1

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h : V = 8 : 1 \quad V = \frac{1}{24} \pi r^2 h$$

そこで、実際に使う芯の体積は、 $2V = \frac{1}{12} \pi r^2 h$

失われる芯の体積は、 $\pi r^2 h - \frac{1}{12} \pi r^2 h = \frac{11}{12} \pi r^2 h$

よって、答えは、 $\frac{1}{11}$

その3 比の関係だけで解決する場合

全体に占める割合から求めると

(大きな円すいの体積) =  $\frac{1}{3}$  (円柱の体積)

(小さな円すいの体積) =  $\frac{1}{8}$  (大きな円すいの体積)

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} \text{ (円柱の体積)} = \frac{1}{24} \text{ (円柱の体積)}$$

そこで、実際に使う芯の体積は、 $\frac{1}{12}$  (円柱の体積)

失われる芯の体積は

$$\text{(円柱の体積)} - \text{(実際に使う芯の体積)} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

よって、答えは、 $\frac{1}{11}$

なるべく多くの解答例を正誤に関係なく発表させて、その中から新しい発見(面白い考え方や物の見方)をさせることが重要であり、それが課題学習の果たすべき役割ではないかと個人的に思っている。(川尻 隆之)

出典: 天才秀才数学問題集(下) 三橋重男著 東京図書 P183~P185

題 材
 格子多角形の面積（３年）

|         |                          |
|---------|--------------------------|
| 指 導 計 画 | 図形の計量                    |
| (1)     | 三平方の定理…………… 5 時間         |
| (2)     | 三平方の定理の利用…………… 6 時間      |
| (3)     | 課題学習（格子多角形の面積）…………… 1 時間 |
| (4)     | 問 題…………… 2 時間            |

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| 目 標 | (1) 格子三角形の面積について、既習の知識・技能を使って考える。 |
|     | (2) 問題解決の仕方の多様さを学ぶ。               |
|     | (3) いろいろな格子多角形についても類推し、解決する。      |

授 業 展 開

課 題

格子三角形の面積を求める。

補助線のひき方や視点を変えて、いろいろな求め方を考えてみよう。

＜課題のねらい及び指導上の留意点＞

いろいろな方法で三角形の面積を求める課題であるが、図に格子があるぶん生徒も取り組みやすいと思われる。既習内容を工夫して利用するよさや、有用性を理解し、活用する能力や態度を伸ばすこと。課題を解決する過程で「生徒の主体的な学習への取り組み」と「数学的な見方や考え方」等を高めるとともに、解決の方法の発見を通して成就感・満足感を得られることをねらいとする。

各生徒が自分の能力に合わせた解き方を見つけ出して取り組めるように指導したい。考える時間を十分にとる。解き方を思いつかない生徒に対しては、個別に生徒の能力に応じた助言を行う。またグループ学習も有効である。

- ＜指導の流れ＞
- 1 課題を提示する。（図をプリントしたものを何枚か配布する。）
  - 2 個人で問題を解決していく。（解決方法を１通りでなく、いくつか考えさせる。）
  - 3 考えを発表させる。（OHPなどを使い発表させる。）
  - 4 他の問題への発展（生徒各自に適当な格子多角形をつくらせ、解決させる。）

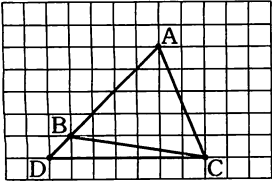
＜解 決 例＞

ア

長方形PQCR－(△PBA  
 ＋△QBC＋△RCA )

イ

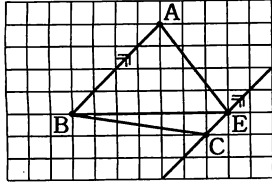
左図のように、点D  
 をおく。  
 △ADC－△BDC



ウ 左図のように、点Dをおく。

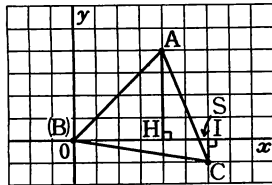
$$\triangle ABC : \triangle BDC = AB : BD = 4 : 1$$

$$\triangle ABC = \frac{4}{5} \triangle ADC = 14$$



エ 左図のように、点Eをとる。(  $AB \parallel CE$  )

$$\text{等積変形により, } \triangle ABC = \triangle ABE = 14$$

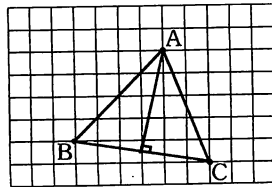


オ 格子を座標軸におきかえて、一次関数の応用として求める。

( 点Bを原点とする。 )

$$\text{直線 AC の式 } y = -\frac{5}{2}x + 14, \text{ 直線 AC と } x \text{ 軸との交点 S の座標}$$

$$\text{は } S\left(\frac{28}{5}, 0\right) \quad \triangle ABC = \triangle ABS + \triangle CBS = 14$$



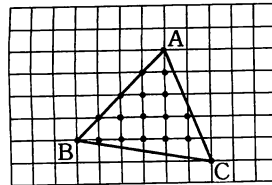
カ 三平方の定理の利用

$$AB = 4\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{37}, \quad CA = \sqrt{29}$$

$$h^2 = (4\sqrt{2})^2 - x^2 = (\sqrt{29})^2 - (\sqrt{37} - x)^2$$

$$x = \frac{20\sqrt{37}}{37}, \quad h = \frac{28\sqrt{37}}{37}$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{37} \times \frac{28\sqrt{37}}{37} = 14$$



キ ピックの定理の利用 ( 確認のため )

面積……S, 多角形を囲む周上の点の数……C

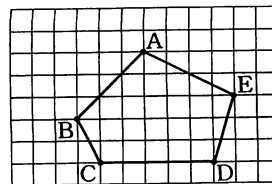
多角形の内部に含まれる点の数……i とするとき

$$S = C/2 + i - 1 \quad \text{よって } \triangle ABC = \frac{6}{2} + 12 - 1 = 14$$

#### ○ 他の問題への発展

生徒各自が適当な格子多角形をつくり、課題に用いた解法が使えるか考えさせる。

( 例 )



○ 長方形の面積から、4つの三角形の面積をひいて求める。

○ 三角形や長方形等に分割して求める。

○ 等積変形と一次関数の考え方を用いて求める。

( 仁木島 康文 )

## 題 材 三角形の面積（３年）

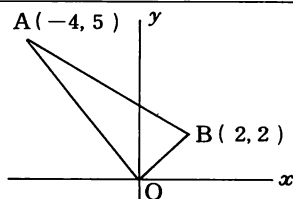
|         |                                  |      |
|---------|----------------------------------|------|
| 指 導 計 画 | (1) 関数 $y = ax^2$ .....          | 3 時間 |
|         | (2) 関数 $y = ax^2$ のグラフ .....     | 6 時間 |
|         | (3) 課題学習（三角形の面積）.....            | 1 時間 |
|         | (4) 関数 $y = ax^2$ の値の変化の割合 ..... | 3 時間 |
|         | (5) いろいろな比例.....                 | 1 時間 |
|         | (6) 問 題.....                     | 2 時間 |

- 目 標
- (1) 三角形の面積を多様な方法で求めることにより、数学的な見方や考え方を育てる。
  - (2) 習得した知識、技能を使い、意欲的に学ぶ態度を養う。

## 授 業 展 開

### 課 題

右の図で、 $\triangle AOB$ の面積をできるだけ多くの方法で求めてみよう。ただし 1 目盛を 1cm とする。



### <指導のねらい及び指導上の留意点>

簡単な問題ではあるが、多様な方法で求めていく場合に、①小学校算数、②平面上の座標、③一次関数のグラフ、④三角形の等積関係などこれまでに学習してきた多くの基礎的知識や技能が必要である。多様な方法で求める過程で、これらをどのように使っていくかを考えさせ、学ぶ楽しさを体得させる。

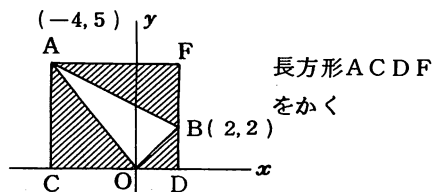
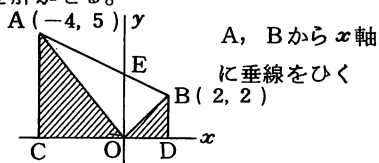
課題を求めさせる前に、必要な知識を説明し、特に一次関数のグラフについては、基礎学力のついていない生徒には十分に配慮する。

### <指導の流れ>

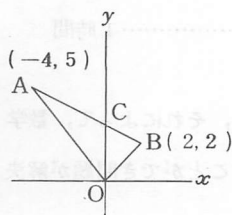
- 1 課題を提示し、解くのに必要な知識を発表させる。
- 2 小学校算数、一次関数、三角形の等積変形について説明する。
- 3 課題を多様な方法で求めさせる。
- 4 考え方を発表させる。
- 5 発展的な課題を解かせる。

生徒の解答例

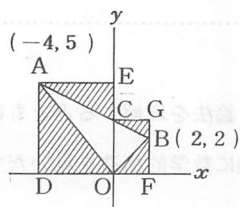
小学校の算数



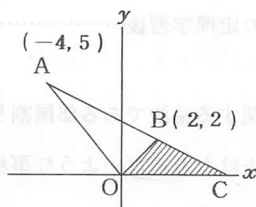
# 一次関数



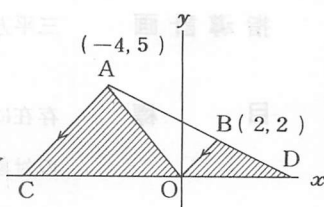
切片Cを求める。  
 $\triangle AOC + \triangle BCO$



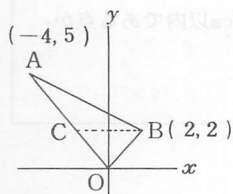
切片Cを求める。



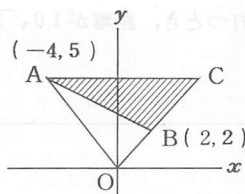
ABを延長する。  
 点Cの座標を求める。



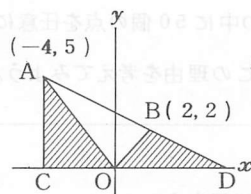
ABを延長する。  
 AからBOに平行な直線をひく。点C, Dの座標を求める。



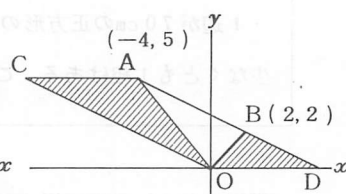
BCはx軸に平行,  
 点Cの座標を求める。  
 $\triangle ACB + \triangle COB$



OBを延長する。Aから  
 x軸に平行線をひく。  
 点Cの座標を求める。

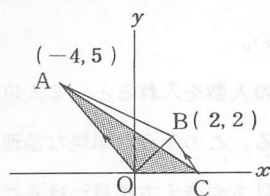


ABを延長する。Aから  
 x軸に垂線をひく。  
 点C, Dの座標を求める。

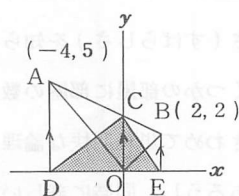


平行四辺形CODAをかく。点C, Dの座標を求める。

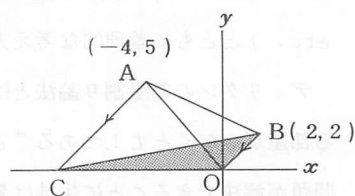
## 三角形の等積変形



BからAOに平行な線をひき,  
 x軸との交点をCとする。点C  
 の座標を求める。面積はOCを  
 底辺とする。



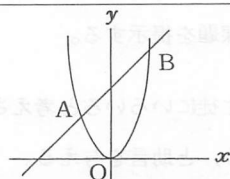
切片Cの座標を求める。



AからBOに平行な線をひき, x  
 軸との交点をCとする。点Cの座  
 標を求める。面積はCOを底辺と  
 する。

## 発展課題

右の図のように、直線  $y = x + 6$  と方物線  $y = x^2$   
 が2点A, Bで交わっている。 $\triangle AOB$ の面積はい  
 くらになるでしょうか。



(熊本 隆彦)

**題 材** 部屋割り論法（ディリクレの原理）を知ろう（3年）

**指導計画** 三平方の定理学習後…………… 1 時間

**目 標** 存在に関する論法である部屋割り論法を理解するとともに、それによって、数学の対象とはなり得ないような事柄に数学的構造を見いだすことができ問題が解決できることを知る。

**授業展開**

課 題

1 辺が 70 cm の正方形の中に 50 個の点を任意に打つとき、距離が  $10\sqrt{2}$  cm 以内である点が、少なくとも 1 組はある。この理由を考えてみよう。

<課題のねらい及び指導上の留意点>

「数学的見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる」ことが数学科の目標の 1 つである。その意味においてある課題（問題）に対してその中に数学的な構造をみだし、解決していくことはたいへん重要なことであるといえる。ここではこの数学的な見方や考え方の 1 つとして、ディリクレの部屋割り論法を取り上げ、いろいろな論法（たとえば、背理法や転換法、三段論法 etc.）とともに論理的な考え方のよさ（すばらしさ）を知らせたい。

ディリクレの部屋割り論法とは“いくつかの部屋に部屋の数以上の人数を入れると、2 人以上はいる部屋が少なくとも 1 つある”というきわめて単純明快な論理である。このような単純な論理により問題が解決できることに生徒は驚くであろうし、同時に新しい物の見方や考え方を見つけることになるであろう。

<指導の流れ>

- 1 新しい論法を知ろうということで、簡単に部屋割り論法を紹介しておく。
- 2 課題を提示する。
- 3 生徒にいろいろと考えさせ、ヒントとして最初の正方形を 10 cm 四方の正方形に分けて考えてみよう、と助言を与える。

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 |   |   |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |   |
| 7 |   |   |   |   |   |   |   |

左の図のように、元の正方形を縦・横に7等分して、1辺が10 cmの49個の正方形を考える。

50個の点のうち、少なくとも2個は同じ小正方形の中に存在しなければならない。

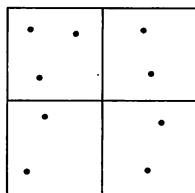
正方形内の2点をもっとも距離を隔てるのは対角線の長さであり、小正方形の対角線の長さは、

$$\sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \quad (\text{cm})$$

である。以上により課題の説明が終了する。

(関連問題)

- 1 1辺の長さが2の正方形の中に9個の点を置く。このときその中の3個の点を結んでできる三角形のうちで、面積が $\frac{1}{2}$ をこえないものが必ずある。これを説明せよ。



- 2 35人の同級生の中には同じ日に生まれた人が必ずいる。なぜか。
- 3 1から50までの整数の中から任意に26個の相異なる数を選ぶと、それらの数の中には和が51になる2つの数の組が必ず含まれていることを示せ。(ヒント：和が51になる2数の組は、(50, 1), (49, 2)・・・(26, 25)の25組である。)

(米山 肇)

## 題 材 三山くずし（3年）

指導計画 確立と標本調査学習後…………… 1時間

- 目 標
- (1) 数学的な見方・考え方のよさを体験するとともに、それを活用することができる。
  - (2) ゲームを通して、数学を学習する意欲を持ち、新しい課題を自ら設定し、主体的に取り組むことができる。

### 授業展開

課 題

基石の山を三つ作ります。何個ずつでもよいのですが、  
3個、4個、5個としましょう。二人交互にどれか一つの  
山だけから、1個か2個か3個取りあいっこし、取る石が  
なくなった人が負けです。

3個、4個、5個の場合、うまくやれば先手が勝てるの  
ですが、最初、どうすればよいでしょうか。



#### <課題のねらい及び指導上の留意点>

三山くずしを課題に取り上げることにより、数学が非人間的で冷たいものではなく、ゲームという  
ような日常生活と密接に結びついているということを知らせたい。また、ただ単にゲームをするので  
はなく、先手必勝法を考えさせるなかで、論理的思考につなげ、数学的な見方・考え方のよさを体験  
させたい。

この課題は、中国で昔から遊ばれていたゲームだそうなので、生徒に意欲を持たせ、生き生きと課  
題解決に取り組ませることができると考えられる。このとき、生徒同志で三山くずしのゲームで遊ぶ  
時間を十分に取ってから課題解決へ導入させることにより、生徒の課題への解決意欲を高める効果  
があると思われる。

生徒にこの課題を考えさせるときは、生徒の思考を助け、より具体化するために基石や、掲示用マ  
グネットを準備しておくといわれる。

この課題をもとに、自主的に新しい課題設定をさせたい。自分で設定した課題ということで、課題  
に意欲的に取り組むことが期待できる。このとき、課題設定の難易度に個人差もあるので、机間指導  
の充実を図りたいものである。

## ＜指導の流れ＞

- 1 課題を提示する。
- 2 各グループで、試行錯誤しながら、課題解決をさせる。
- 3 結果と考え方を発表させる。

三つの山の碁石の数が $a$ 個、 $b$ 個、 $c$ 個のとき、三つの山の状態を $(a, b, c)$ と書くことにする。このとき、 $a, b, c$ の順をどう変えても同じである。

石の状態が $(a, b, c)$ のとき、相手がどのように石を取っても、自分がうまく石を取って、相手を負けに追い込めるとき、その石の状態を必勝の手ということにする。

$r = 0, 1, 2, 3$ のとき

$(0, r, r)$ は必勝の手：相手が取った石の数だけ、別の山から取ればよい。

$(1, 2, 3)$ は必勝の手： $(0, r, r)$ の型に追い込めればよいということから次のように簡単に確かめられる。相手が取ったとする石を●，そのとき自分が取る石を◎とする。

|   |   |    |     |   |   |    |     |
|---|---|----|-----|---|---|----|-----|
| ① | ● | ○○ | ○○◎ | ② | ○ | ●○ | ◎◎◎ |
| ③ | ○ | ●● | ○◎◎ | ④ | ◎ | ○○ | ●○○ |
| ⑤ | ○ | ◎◎ | ●●○ | ⑥ | ○ | ○◎ | ●●● |

一般に $l, m, n$ が負でない整数で、 $r$ が $0, 1, 2, 3$ のとき

$r$ 型： $(4l, 4m+r, 4n+r)$ は必勝の手

4型： $(4l+1, 4m+2, 4n+3)$ は必勝の手

ということがいえる。なぜなら、相手がある山から $k$ 個( $k = 1, 2, 3$ )取ったとすると、自分はその山から $(4-k)$ 個取れば、最初より石数は少なく、同じ型の必勝の手にもちこめるからである。

この型以外の石の状態なら、相手のほうがどれかの型の必勝の手にもちこめるので、相手のほうが勝てる。

問題の $(3, 4, 5)$ の場合、第1の山から2個取ると、1型の必勝の手になる。

第2の山から2個取ると、4型の必勝の手になる。

第3の山から2個取ると、3型の必勝の手になる。

以上より、どれかの山から2個取ればよいことがわかる。

- 4 各グループで、新しい課題を設定させ、解決させる。

新しい課題としては、次のようなものが考えられる。

- ・三山それぞれの碁石の数を変えたとき、先手必勝となるかどうか。
- ・もし、先手必勝ならば、最初、どのように取ればよいか。
- ・1回に取れる碁石の数を変えるとどうなるか。
- ・山の数を変えるとどうなるか。
- ・人数を変えるとどうなるか。

- 5 各グループでの課題の結果、考え方を発表させる。

(宮田 和代)

— 編集にたずさわった人 —

|                                  |                                        |                                                                                     |                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 阿有乾井猪大香川岸喜熊倉佐笹澤庄田高出徳中新仁西長長藤宮山山横米 | 部馬<br>上谷下川尻<br>多本橋藤川田野岡橋原永西居島原谷川本田下井山山 | 正純<br><br>正経<br>隆勝<br>一隆<br>誠英<br>由<br>泰一<br>勤茂<br>啓久<br>克康<br>芳勝<br>康孝<br>和益<br>貴る | 直幸格衛治幸朗之繁郎彦一郎子勉志雄子美牟雄行文人義子彰代司子み肇 | 勝浦郡福原中學校<br>徳島市応茂名中學校<br>徳島市加藍住中學校<br>板野郡牟岐中學校<br>海部郡第1中學校<br>鳴門市徳島中學校<br>徳島市上分中學校<br>名西市阿南第1中學校<br>阿南市阿南中學校<br>阿徳島市城東中學校<br>板野郡藍住中學校<br>三好郡山城西中學校<br>徳島市椿町中學校<br>阿南市阿南第1中學校<br>阿南教育大学学校教育学部附属中学校<br>徳島市富田中學校<br>美馬郡脇町中學校<br>鳴門教育大学学校教育学部附属中学校<br>板野郡松茂中學校<br>麻植郡鴨島第1中學校<br>麻植郡鴨島東中學校<br>美馬郡一字中學校<br>鳴門教育大学学校教育学部附属中学校<br>徳島市富田中學校<br>鳴門市北灘中學校<br>那賀郡木沢中學校<br>那賀郡木沢中學校<br>阿波郡市場中學校<br>徳島市八万中學校<br>小松島市小松島中學校 |
|----------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

(五十音順)