

# 数学科課題学習の研究

平成 3 年 8 月

徳島県中学校教育研究会数学部会

## ま え が き

目まぐるしく変貌する世界情勢の中、地球規模で物事を見ることが、いや応なしに必要となって来た。これらの視点に立って、21世紀を展望した人間の在り方という方向で、多くの論議がなされている。

そうしたことを踏まえて、平成元年3月新指導要領が告示された。すでに移行措置が実施中で、平成5年度からは、完全実施されることになっている。

数学科の目標も、より具体化され、「数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる。」となっている。

この目標を、教育課程審議会の答申に照らしてみると、

- ① 「基礎的」ということばが出るが、これを絶対的、固定的な意味を持つ概念ではなく、相対的な意味の概念と考え、ある前提を置いたときに、それを解決するのに必要な基礎的なことがらと考えるべきである。
- ② 「数理的な見方や考え方のよさ」これを分かるようにすることは「豊かな心を育成すること」へつながる。
- ③ 「それらを進んで活用する態度を育てる。」は「自ら学ぶ意欲を育てることが特に大切であり、学習への適切な動機を与え、学ぶことの楽しさや成就感を体得させること」の表れである。

この具体的な表れが、第2・3学年において実施するよう示された課題学習であろう。

本県中教研数学会では、この点に着目し、昨年度来研究に取り組んできた。従来からも総合問題として、いろいろ工夫されて来ているが、更に生徒の主體的な学習を促し、数学的な見方や考え方の育成が図れるよう課題を作成し、生徒の自主性、創造性を養っていくことを目標とした。

各郡市の研究委員の先生方のご協力を得て試案をまとめることができました。各学校において、それぞれの実態にあわせて、有効にご活用ください。今後の研究推進に大いに役立つと信じます。

最後になりましたが、大変ご多忙な中、本書の編集にご協力いただきました、各郡市の研究委員の先生、ならびに、いろいろお世話になりました事務局の先生方に厚くお礼申し上げます。

平成3年8月

徳島県中学校教育研究会数学会

会 長 乾

格

# 目 次

## < 2 年 >

|                                           |            |             |    |
|-------------------------------------------|------------|-------------|----|
| 1 ひもの長さ .....                             | 徳島市城西中学校   | 森岡 俊哉 ..... | 2  |
| 2 規則正しく並んだ数 .....                         | 勝浦郡福原中学校   | 阿部 正直 ..... | 4  |
| 3 カレンダーの秘密を探ろう .....                      | 阿南市椿町中学校   | 澤田 勉 .....  | 6  |
| 4 時計の長針と短針（連立方程式） .....                   | 小松島市小松島中学校 | 増田 章生 ..... | 8  |
| 5 コインの重さを求めよう<br>（連立方程式の導入） .....         | 名西郡神山中学校   | 秋山 真人 ..... | 10 |
| 6 図形の調べ方 .....                            | 徳島市八万中学校   | 五島志津子 ..... | 12 |
| 7 山形の等積変形 .....                           | 麻植郡鴨島第一中学校 | 三倉 幸夫 ..... | 16 |
| 8 四角形の各辺の中点を結んでできる図形<br>（中点連結定理の応用） ..... | 徳島市徳島中学校   | 香川 朗 .....  | 18 |

## < 3 年 >

|                            |           |             |    |
|----------------------------|-----------|-------------|----|
| 1 立体の切断のいろいろ .....         | 鳴門市第一中学校  | 大下 経幸 ..... | 20 |
| 2 直角三角形のまわりにできる図形の面積 ..... | 阿波郡阿波中学校  | 湯藤 義文 ..... | 22 |
| 3 マッチ棒でできる三角形の面積 .....     | 那賀郡木頭中学校  | 鹿児島厚史 ..... | 24 |
| 4 ビリヤードの玉の軌跡 .....         | 海部郡牟岐中学校  | 猪谷 正治 ..... | 26 |
| 5 ピンゴゲーム .....             | 徳島市富田中学校  | 木下 隆司 ..... | 28 |
| 6 ミツバチはなぜ六角形の巣を作るのか .....  | 麻植郡美郷中学校  | 猪井 淑子 ..... | 30 |
| 7 模様の面積・長さ .....           | 三好郡三加茂中学校 | 内田 清文 ..... | 32 |
| 8 たし算の三角関係・四角関係 .....      | 板野郡藍住東中学校 | 宮本 淳子 ..... | 34 |

## 題 材 ひもの長さ(2年)

|         |             |                 |
|---------|-------------|-----------------|
| 指 導 計 画 | (1) 式の加法・減法 | 4 時間            |
|         | (2) 式の乗法・除法 | 4 時間            |
|         | (3) 文字式の利用  | 3 時間 ( 本時 1/3 ) |
|         | (4) 問 題     | 2 時間            |

|     |                                                   |
|-----|---------------------------------------------------|
| 目 標 | (1) 文字を用いた式に関連したいろいろな用語の意味を明らかにし、これを正しく使えるようにする。  |
|     | (2) 簡単な単項式、多項式の加減について理解させ、それに習熟させる。               |
|     | (3) 単項式と単項式、および単項式と多項式の乗除について理解させ、それに習熟させる。       |
|     | (4) 式を用いて数量の関係や整数の性質を証明したり、等式を使いみちに应じて変形できるようにする。 |

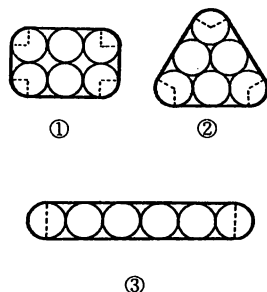
## 授 業 展 開

### 課 題

太郎君はお店に缶ジュースを買いに行きました。同じものを6本も買ったので、ひもでしばって持ち帰ろうと思っています。

ひもをできるだけ短くするには、下の図の①②③の中のどの方法が良いのか、答えなさい。また、その理由も述べなさい。

ただし、ジュースの缶は直径 4.9 cm, 5.1 cm, 6.2 cm といろいろな種類があり、彼がどの大きさのものを買ったのかについては残念ながら分かっていません。



### <課題のねらい及び指導上の留意点>

文字や文字式に対する生徒の理解は未だ不十分で、大きな個人差がみられる。一年時に学んだ「文字と式」の学習内容である数の代表として文字を使うこと、文字の式は一般的にしかも簡潔に表すことができ便利であることなどが十分理解されているとはいいい難い。未知数として文字を使うことや、指定された文字を使って式に表すことはできるものの、自分から進んで文字を選び、式をつくることはなかなかできない状態である。

「文字式の利用」の学習は、初めて本格的に系統だてて論証について学習をしていくところでもある。それゆえ、推論の過程を的確に表現する能力の素地をしっかりと養っていく必要がある。しかし、これまでの学習で論証の経験が少なく、学習を始める最初の段階で、あたりまえのことをなぜわざわざ説明しなければいけないのか、まだどうすれば証明できるのかなど、論証の意義やその方法について理解できないということも起きてくる。

従って最初から証明という形ではなく、具体的・帰納的に性質をみつけさせ、それが成り立つわけ

を考えさせる形での課題学習が必要である。そして、どんな場合でも、その関係が成り立つことを説明するためには、具体例を示すだけでは不十分であり、すべての数を表す文字を用いて一般的に論証を進めるのが有効な方法であることを理解させ、また結論として、何を導けばよいのかについても明確にしていける必要があると考えた。

<指導の流れ>

1 課題を展示する。

具体物を提示し、課題の内容を把握させる。ここで、どの方法をとったにせよ同じ6つの缶をしぼるのだから、缶の大きさはこの問題を解く上では直接関係がないことを理解させた上で課題に取り組ませる。

2 結果を予想させる。

自分の経験や見た感じで判断して答えさせる。  
(正しくは、①と②であるが、この時点ではそのことには触れないでおく。)

3 自分の力で課題を解決させる。

計算など、それぞれの考えに基づいた方法で答えを求めさせ、その根拠を発表する。  
ア 「示された数の中の一つを使って、①②③の各方法で必要となるひもの長さを、具体的な数値で求めて比べる」

直径 4.9 cm の場合

- ①  $4.9 \times 6 + 4.9 \times \pi = 29.4 + 4.9\pi$   
②  $4.9 \times 6 + 4.9 \times \pi = 29.4 + 4.9\pi$   
③  $4.9 \times 10 + 4.9 \times \pi = 49 + 4.9\pi$   
イ 「缶の直径を自分の計算しやすい数値に変えて計算して、求める」

例えば、直径を 5 cm として①②③を計算するなど、

- ウ 「図形の問題として処理する」  
①②は直径が 6 つと円周 1 つ分  
③は直径が 10 と円周 1 つ分

- エ 「文字の式を使って式の形で比べる」  
直径を  $x$  cm とすると

①②は  $6x + \pi x$           ③は  $10x + \pi x$

4 解答及び考え方を比較検討させる。

発表した解答や考え方の優れている点、不十分であると思われる点について自分の考えを発表する。

(できる限りたくさんの考え方を取り上げ、比較検討していく中で、文字式を用いて考えるよさに気づかせ、文字を用いると数量の関係が、一般的にかつ簡潔に表すことができることを理解させる。)

( 森岡 俊哉 )

## 題 材 規則正しく並んだ数（2年）

|         |               |      |
|---------|---------------|------|
| 指 導 計 画 | (1) 式の加法・減法   | 4 時間 |
|         | (2) 式の乗法・除法   | 4 時間 |
|         | (3) 文字式の利用    | 3 時間 |
|         | (4) 規則正しく並んだ数 | 1 時間 |

|     |                                          |
|-----|------------------------------------------|
| 目 標 | (1) 規則正しく並んだ数の規則性を見つけ出して、和を求めることができる。    |
|     | (2) 規則正しく並んだ数の和を、文字の式の考え方を用いて理解することができる。 |

## 授 業 展 開

| 課 題                                                                                                                                                                                                                                  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 右のように規則正しく並んだ数で、  で囲まれた5つの数の和はいくらになるか。また、  を移動して行ったとき、その和はいくらになるか。 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|                                                                                                                                                                                                                                      | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|                                                                                                                                                                                                                                      | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|                                                                                                                                                                                                                                      | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|                                                                                                                                                                                                                                      | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 囲み方を、  や  に変えるとどうなるだろうか。                                       | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |

### <課題のねらい及び指導上の留意点>

本課題は、の中の5つの数字の和を求めるという生徒にとって、取り組みやすい課題である。最初は、1つずつたして行くことで全員が、解決できることと予想するが、数回繰り返して行くうちに、生徒一人一人、能力に応じた解き方をするものと思われる。各数の関係を調べていくうちに、平均の考え方を利用して、（真ん中の数）×5という関係を見つけ出してくるだろう。それを、生徒全員に確認させ、さらに囲み方をやのようにいろいろ変えてみても、やはりこの関係が成り立つことを各自に確認させたい。

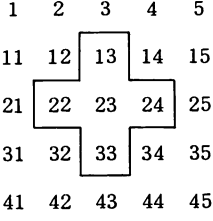
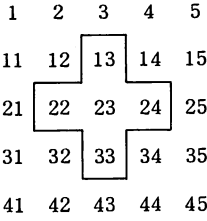
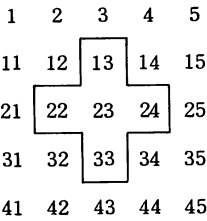
さらに、何故そうなるか説明を各自に考えさせ、文字の式を利用して説明できることを気づかせたい。さらに囲み方をやのようにいろいろ変えた場合も、同様にして説明できることに気付かせたい。能力に応じて、文字の式で説明できるものと、そうでないものが出てくると思うが、生徒一人一人の思考過程を重要視し、グループ学習で、各自の考えを練り上げさせ、数学的な見方や考え方の良さを実感させたい。また、成果を発表しあい、成就感や満足感を味わうことで、主体的に学ぼうと

する態度の育成につながるものと思われる。

<指導の流れ>

「の中の5つの数字の和を求めよ。」という課題を出したとき、次のような解答が予想される。

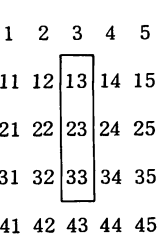
- ① 1つずつたす      ②  $13 + 33 = 22 + 24$  に気づく      ③ (真ん中の数)  $\times 5$



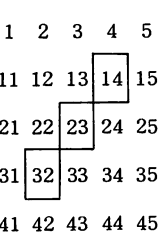
$13 + 22 + 23 + 24 + 33 = 115$        $(13 + 33) \times 2 + 23 = 115$        $23 \times 5 = 115$

最初は全員が①の方法で求めるとと思われるが、を動かして何回か求めていくうちに、②または③のことに気づいてくると予想する。

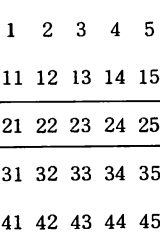
次に応用としてややにかえて、その中の和を求めさせても、上の③の考え方が理解できていれば簡単に解を求められるだろう。



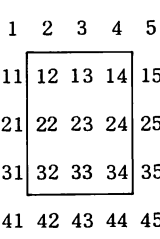
$23 \times 5 = 115$



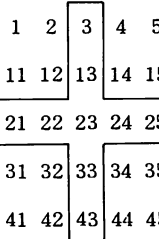
$23 \times 5 = 115$



$23 \times 5 = 115$

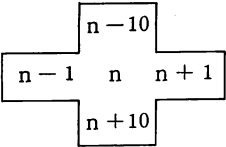


$23 \times 9 = 207$



$23 \times 9 = 207$

規則正しく並んだ数の和を求める法則(真ん中の数 $\times$ 数の個数)を見つけ出すのは、操作を繰り返して行うことにより、生徒にも理解しやすいと思う。最後に何故そうなるのか、生徒に理由を考えさせる。例えば、の場合なら次のような説明が予想される。



$(n-10) + (n-1) + n + (n+1) + (n+10) = 5n$

(阿部 正直)

## 題 材 カレンダーの秘密を探ろう（２年）

指導計画 (1) ５月のカレンダーの数の並びにはどんな特徴があるかを発見……………１時間  
(2) 規則性を説明するための文字使用の必要性と文字使用のよさの理解…１時間

目 標 (1) 数の並びから規則性を見つけることにより、直感力や洞察力を養う。  
(2) 規則性を説明する手段として文字を使用することの大切さを知る。  
(3) 文字を使用し論理的に考察する能力を養う。

## 授業展開

〔第１時〕

### 課 題

課題Ⅰ 右のように数が並んでいるとき、どんな特徴があるか考えてみよう。

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

課題Ⅱ ５月のカレンダーを見て、どんな特徴があるか考えよう。

| 5 月 |    |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|----|
| 日   | 月  | 火  | 水  | 木  | 金  | 土  |
|     |    |    | 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5   | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 12  | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19  | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26  | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |    |

### <課題のねらい及び指導上の留意点>

『文字式の利用』の後で行う。

まず、課題Ⅰで簡単な数の並びの場合の規則性を見つけることにより、その見つけ方や、目の付け方等を十分養う。ここでは、生徒の発表するものはすべて肯定的に受け止め、発見しようとする意欲を失わせないようにしたい。

課題Ⅱでは５月のカレンダーを見て、課題Ⅰの要領に従い数の並びの規則性を見つげ出し、それらを説明するための手段として文字の使用に気づかせる。ここでは、自由に見つけさせ、生徒の自然な発見を大切にするとともに、できるだけ多く発見させるようにする。そして、なぜそうなるのか、そうなることを説明できないかといったことを考えさせる。

### <指導の流れ>

1 課題を提示し、規則性を見つげさせる。

2 見つけた規則性を発表させる。

※ 生徒の見つけた規則性の例

①  $2 \times 2$  の数で対角線上の和は等しい。

②  $2 \times 2$  の数で対角線上の差は等しい。

③ ３行（日曜日から土曜日まで）の組を考えると、上下の行のそれぞれの数の平均は真ん中の行の数になる。

④  $3 \times 3$  の数で真ん中の数を含めた縦・横・斜めの３つの数の和はすべて等しい。

3 2で見つけた規則性を一般的に説明するにはどうしたらよいかを考えさせ、次時への課題とする。

〔第2時〕

課 題

5月のカレンダーの数字の並びで見つけた規則性が一般的に成り立つことを説明するにはどうしたらよいか。

＜課題のねらい及び指導上の留意点＞

課題Ⅰ・Ⅱをした次の時間に行う。

規則性を一般的に説明するには文字が有用であることに気づかせ、文字を使ってそれらを説明させる。このとき、規則性をどのように文字式に表すか。規則性の意味をよく理解させておくことが大切である。

＜指導の流れ＞

- 1 課題を提示する。
- 2 自分の力で課題を解決させる。
- 3 考えを発表させる。

※ 生徒の考えた説明の例

- ①  $2 \times 2$  の数で対角線上の和は等しい。

$$\begin{array}{ccc} n & n+1 & \text{数の並びを左のようにすると,} \\ n+7 & n+8 & (n+1) + (n+7) = 2n+8 \\ & & n + (n+8) = 2n+8 \\ & & \text{よって, 等しいことがいえる。} \end{array}$$

- ②  $2 \times 2$  の数で対角線上の差は等しい。

$$\begin{array}{ccc} n & n+1 & \text{数の並びを左のようにすると,} \\ n+7 & n+8 & (n+7) - (n+1) = 6 \\ & & (n+8) - n = 8 \\ & & \text{よって, 等しいことがいえる。} \end{array}$$

- ③ 3行(日曜日から土曜日まで)の組を考えると、上下の行のそれぞれの数の平均は真ん中の行の数になる。

| 日  | 月  | 火  | 水  | 木  | 金  | 土                   |
|----|----|----|----|----|----|---------------------|
|    |    |    | 1  | 2  | 3  | 4                   |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11..... $n$         |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18..... $n+7$       |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25..... $n+14$ とすると |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |                     |

$$\frac{n + (n+14)}{2} = n+7$$

よって、真ん中の行の数になる。

- ④  $3 \times 3$  の数で真ん中の数を含めた縦・横・斜めの3つの数の和はすべて等しい。

$$\begin{array}{ccc} n & n+1 & n+2 \\ n+7 & n+8 & n+9 \\ n+14 & n+15 & n+16 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{数の並びを左のようにすると, それぞれの3つの数の和は,} \\ n + (n+8) + (n+16) = 3n+24 \\ (n+1) + (n+8) + (n+15) = 3n+24 \\ (n+2) + (n+8) + (n+14) = 3n+24 \\ (n+7) + (n+8) + (n+9) = 3n+24 \\ \text{よって, すべて等しい。} \end{array}$$

(澤田 勉)

## 題 材 時計の長針と短針（連立方程式）（2年）

### 指 導 計 画 連立方程式

- (1) 連立方程式 ..... (3時間)
- (2) 連立方程式の解き方 ..... (5時間)
- (3) 連立方程式の利用 ..... 本時は5/5 (5時間)
- (4) 問 題 ..... (2時間)

### 目 標 やや複雑な数量の関係を2つの文字を用いて等式に表し、これを用いて問題解決を形式的、能率的にできるようにする。

そのために、

- (1) 連立方程式とその解の意味を理解させる。
- (2) 簡単な形の連立方程式の解法を理解させ、その習熟をはかる。
- (3) 問題にふくまれる数量の関係を方程式に表せるようにし、これを用いて問題解決ができるようにする。

### 授 業 展 開

#### 課 題

3時と4時の間に時計の長針と短針とがちょうど重なり合う時刻を求めなさい。  
また、一直線になる時刻を求めなさい。

#### <課題のねらい及び指導上の留意点>

課題を解決するために、何を、どのように考えればよいか。具体例を考え予測したり、等しい関係を見つけ出し等式を立式する過程で、生徒が自分自身で考え立式できるようにすることが大切である。

また、直感だけでは解決が難しい関係も方程式を利用することで“できる”。方程式を利用することの“よさ”とともに、今までにできなかったことが“できる”喜びをあげさせたい。そのためにも、日常生活の中で身近にある“時計”を題材として選び課題を提示する。さらに、課題を発展的にとらえ、長針と短針が一直線になる時刻を求める。また、3時と4時に限らず他の時間帯についても考え求めさせる。

方程式を利用することで、ほとんど同じ要領でどの時間帯についても求められることにきづかせ方程式の“よさ”を知らせたい。

## <指導の流れ>

### 1 課題を提示する。

時計を見させながら、1時間の間には必ず長針と短針が重なる時刻があることを確認しながら「3時と4時の間に時計の長針と短針とがちょうど重なり合う時刻を求めなさい。」という課題を提示する。

### 2 問題を考える時間を与え、発表させる。

何を  $x$  とおくか 3時から長針の動いた角度  $x^\circ$

何を  $y$  とおくか 3時から短針の動いた角度  $y^\circ$

$$x - y = 90$$

$$x = 12y \quad (x, y) = (1080/11, 90/11)$$

長針は1時間に $360^\circ$  1分間に $6^\circ$  動くので  $1080/11 \div 6 = 180/11$

求める時刻は3時16と4/11分

### 3 「3時と4時の間に時計の長針と短針が一直線になる時刻を求めなさい。」という課題を提示する。

何を  $x$  とおくか 3時から長針の動いた角度  $x^\circ$

何を  $y$  とおくか 3時から短針の動いた角度  $y^\circ$

$$x - y = 90 + 180$$

$$x = 12y \quad (x, y) = (3240/11, 270/11)$$

長針は1時間に $360^\circ$  1分間に $6^\circ$  動くので  $3240/11 \div 6 = 540/11$

求める時刻は3時40と10/11分

### 4 他の時間帯ではどうか。問題を作り解決していく。

「1時と2時の間に時計の長針と短針とが重なる時刻を求めなさい。」

何を  $x$  とおくか 1時から長針の動いた角度  $x^\circ$

何を  $y$  とおくか 1時から短針の動いた角度  $y^\circ$

$$x - y = 30$$

$$x = 12y \quad (x, y) = (360/11, 30/11)$$

長針は1時間に $360^\circ$  1分間に $6^\circ$  動くので  $360/11 \div 6 = 60/11$

求める時刻は1時5と5/11分

(増田 章生)

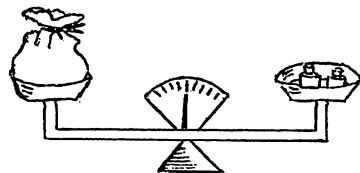
題 材 コインの重さを求めよう（連立方程式の導入）（2年）

目 標 具体的な問題から、2つの二元一次方程式をつくり、そのどちらも満たす文字の値を考える必要から連立方程式を導き、連立方程式の解の意味を明らかにする。

授 業 展 開

課 題

コインA 10枚とコインB 15枚のはいった袋がある。  
袋から取り出さないで、コインAとコインBそれぞれ1枚の重さを求めなさい。  
ただし、必要があれば、はかりを使ってもよい。



<課題のねらい及び指導上の留意点>

第1学年では、一元一次方程式について学習している。ここでは、まず文字を使った式を作らずに、自由に求めさせる。答えを求めていく中で、課題の条件だけでは、コインA 1枚の重さが何gであっても、それにあったコインBの重さが決まるということになり、答えが一通りに決まらないことに気づかせる。また、コインA 1枚の重さを $x$  g、コインB 1枚の重さを $y$  gとした二元一次方程式として課題の条件が表されることを理解させる。その結果、この二元一次方程式には解が無数（有理数全体）にあり、コインの重さは1通りに決まっているはずなのに、このままでは、課題は解決できないことから、課題の矛盾に気づかせたい。この時に、もう1つの条件の必要性を知らせる。

課 題（追加）

もう1つの袋には、コインA 10枚、コインB 5枚が入っている。この袋も利用して、コインAとコインBの重さを求めなさい。

この課題の追加により、条件を新たに二元一次方程式に表し、2つの二元一次方程式のどちらにもあてはまる $x$ 、 $y$ の値があることを発表させ、課題の解になっていることを理解させる。

以上の学習から、同じ値をとる2変数をもつ2つの二元一次方程式を1組にしたものが連立方程式であり、連立方程式の解が1組存在することを理解させたい。

本課題においては、コインAとして50円玉、コインBとして1円玉を使用する。（50円玉は4g、1円玉は1gと、重さが整数の値なので）また、はかりは、1g単位まで正確に測れる精度の高い物か、上皿てんびんを使用する必要がある。そして、生徒の前で実際に、はかりを使って重さを測ってみせると、緊張感も増し、興味を持って授業にのぞめるのではないかと思う。もちろん、予備実験をして、教師が求めているような解が得られるように準備しておく必要がある。

＜指導の流れ＞

1 課題を提示する。

生徒の前で実際に重さを測って、重さが55 gになることを確認する。その後、自由な発想で重さを求めさせ、発表させる。いろいろ意見が出る中で、重さが一通りに決まらないことに気づかせる。

2 コインAの重さを1 g, 2 g, ……と変えて、コインAとコインBの重さを表に表す。

|          |   |               |               |   |               |
|----------|---|---------------|---------------|---|---------------|
| コインA (g) | 1 | 2             | 3             | 4 | 5             |
| コインB (g) | 3 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ |

このように、何通りも答えの組ができることを理解させる。

3 コインAを $x$  g, コインBを $y$  gとして、二元一次方程式に表す。

$$10x + 15y = 55$$

二元一次方程式の解が無数に存在することに気づき、課題の条件からだけでは、解が得られないことから、課題の矛盾に気づかせる。この時に、もう1つの条件が必要になってくることを、できたら生徒の方から出させたい。

4 課題の追加から、条件を新たに二元一次方程式に表し、 $x = 1, 2, 3, \dots$ と変えて、 $x, y$ の値の組を表にまとめる。

このときも、もう1つの袋の重さを測り、45 gになっていることを確認する。

$$10x + 5y = 45$$

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 7 | 5 | 3 | 1 |

前に求めた $x, y$ の値の組と同じものがあることに気づかせる。

$$(x, y) = (4, 1)$$

5 課題を解決し、本時のまとめをする。

以上のことから、コインAが4 g, コインBが1 gになることを理解させる。また、2つの二元一次方程式  $10x + 15y = 55$ ,  $10x + 5y = 45$  を1組にしたものが、連立方程式

$$\begin{cases} 10x + 15y = 55 \\ 10x + 5y = 45 \end{cases}$$

と表されることを知らせ、連立方程式の解が1組存在することを理解させる。

( 秋山 真人 )

題 材 図形の調べ方（２年）

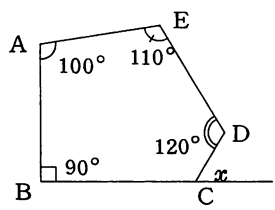
指 導 計 画 １つの角を求めるのに、いろいろたくさんの方で求める。…………… １時間

- 目 標
- (1) 図形の調べ方で、これまでに学んだ知識・技能を使って多様な視点で $\angle x$ を求める。
  - (2) 補助線の引き方を工夫して、できるだけたくさんの方で $\angle x$ を求める。
  - (3) 課題解決による成就感や満足感を味わい、学習意欲を高め、数学を活用する能力や態度を伸ばす。

授 業 展 開

課 題

右の図で $\angle x$ の大きさは何度か。  
補助線のひき方をいろいろ工夫したりして、できるだけ  
多くの違った方法で求めてみよう。



<課題のねらい及び指導上の留意点>

対頂角の性質，平行線と同位角・錯角の関係，三角形の内角の和，三角形の外角と内角の関係，多角形の内角の和，外角の和を学習した後でやらせると，これらの知識を全部使う問題であるから，既習内容を工夫して利用するよさや，有用性を感じ，活用する能力や態度を伸ばすこと，課題を解決する過程で，試行錯誤，直観，論理的思考の能力を育てること。数学的な態度，自己学習能力を育てるとともに，課題解決による成就感・満足感を味わわせ，数学への学習意欲を高めるなどの効果があると考えられる。

時間は十分かける。手のつけようが困難な生徒には「点Dを通してBCに平行な線を入れて考えてみなさい。」というようなヒントを与えて考えさせてもよいと思う。最後に黒板に書いて発表させていくと，多くの考え方がみんなの目にふれることでよくわかる。

<指導の流れ>

- 1 課題を提示する。  
西洋紙に 8 個の図を印刷したものを配布。
- 2 自分の力で課題を解決させる。  
今までに学習した平行線の性質，三角形の外角と内角の関係，多角形の内角の和・外角の和など，これらを全部使って解くことを助言する。
- 3 黒板に 8 個の図を板書しておく。
- 4 考えを発表させる。
  - まず一人に指名し，前に出てきて書かせ，説明もさせる。
  - そのあと，「これ以外の方法でやった人はいませんか？」と言って，同様にして発表させる。

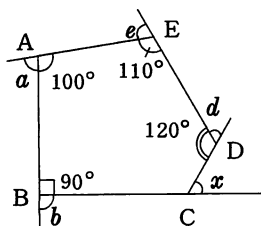
<解決例>

ア 内角の和を使って求める。

$$\angle BCD = 180^\circ \times 3 - (90^\circ + 100^\circ + 110^\circ + 120^\circ) = 540^\circ - 420^\circ = 120^\circ$$

$$\angle x = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

イ 外角を使って求める。



$$\angle a = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\angle b = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

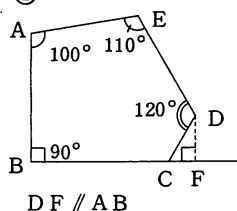
$$\angle d = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle e = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\angle x = 360^\circ - (80^\circ + 90^\circ + 60^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$$

ウ 補助線を引いて求める。

①



頂点Dを通りABに平行な直線を引きBCとの交点をFとする。

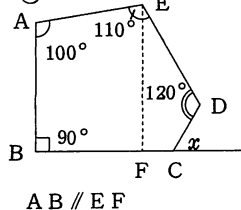
五角形ABFDEで

$$\angle EOF = 180^\circ \times 3 - (90^\circ + 90^\circ + 100^\circ + 110^\circ) = 150^\circ$$

$$\angle CDF = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$

$$\angle x = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$

②



頂点Eを通りABに平行な直線を引きBCとの交点をFとする。

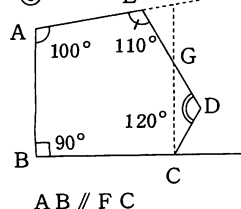
四角形ABFEで  $\angle AEF = 80^\circ$

$$\angle DEF = 110^\circ - 80^\circ = 30^\circ$$

四角形EFCDで  $\angle FCD = 120^\circ$

$$\angle x = 60^\circ$$

③



頂点Cを通りABに平行な直線を引きAEの延長線との交点をF，DE

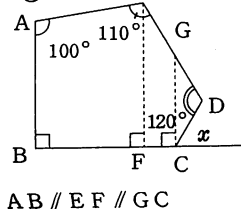
との交点をGとする。AFの延長上に点Hをとる。

$$\angle FEG = 70^\circ \quad \angle HFG = 100^\circ \quad \angle EFG = 80^\circ$$

$$\angle EGF = 30^\circ \quad \angle CGD = 30^\circ \quad \angle DCG = 30^\circ$$

$$\angle BCD = 120^\circ \quad \angle x = 60^\circ$$

④

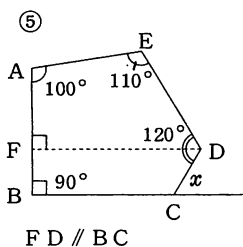


頂点Eを通りABに平行な直線を引きBCとの交点をF，頂点Cを通

りEFに平行な直線を引きEDとの交点をGとする。

$$\angle AEF = 80^\circ \quad \angle FEG = 30^\circ \quad \angle CGD = 30^\circ$$

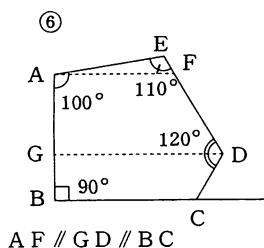
$$\angle DCG = 30^\circ \quad \angle BCD = 120^\circ \quad \angle x = 60^\circ$$



頂点Dを通りBCに平行な直線をひきABとの交点をFとする。

四角形AFDEで  $\angle EDF = 60^\circ$

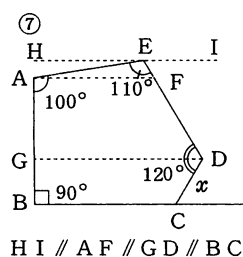
$\angle FDC = 60^\circ$      $\angle x = 60^\circ$



頂点Aを通りBCに平行な直線をひきEDとの交点をF，頂点Dを通りBCに平行な直線をひきABとの交点をGとする。

$\angle EAF = 10^\circ$      $\angle AFE = 60^\circ$      $\angle GDE = 60^\circ$

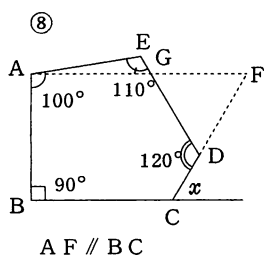
$\angle GDC = 60^\circ$      $\angle x = 60^\circ$



頂点Aを通りBCに平行な直線をひきEDとの交点をF，頂点Dを通りBCに平行な直線をひき辺ABとの交点をG，頂点Eを通して辺BCに平行な直線をひきその直線上に点Hと点Iをとる。

$\angle EAF = 10^\circ$      $\angle AEH = 10^\circ$      $\angle DEI = 60^\circ$

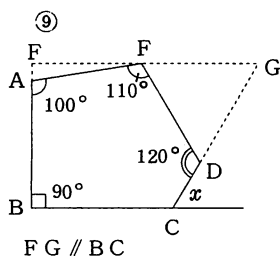
$\angle GDE = 60^\circ$      $\angle GDC = 60^\circ$      $\angle x = 60^\circ$



頂点Aを通り辺BCに平行な直線をひき辺CDの延長線との交点をF，直線AFと辺EDの交点をGとする。

$\angle EAG = 10^\circ$      $\angle AGE = 60^\circ$      $\angle FGD = 60^\circ$

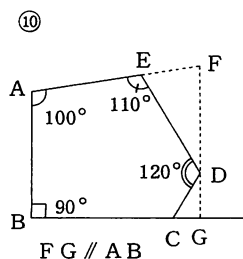
$\angle GDF = 60^\circ$      $\angle F = 60^\circ$      $\angle x = 60^\circ$



頂点Eを通り辺BCに平行な直線をひき，辺ABの延長線との交点をF，辺CDの延長線との交点をGとする。

$\angle FAE = 80^\circ$      $\angle AEF = 10^\circ$      $\angle GED = 60^\circ$

$\angle EDG = 60^\circ$      $\angle EGD = 60^\circ$      $\angle x = 60^\circ$

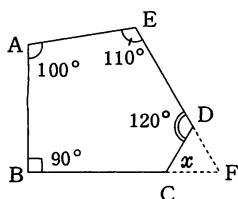


頂点Dを通り辺ABに平行な直線をひき，辺AEの延長線との交点をF，辺BCの延長線との交点をGとする。

$\angle DEF = 70^\circ$      $\angle EFD = 80^\circ$      $\angle EDF = 30^\circ$

$\angle CDG = 30^\circ$      $\angle CGD = 90^\circ$      $\angle x = 60^\circ$

⑪

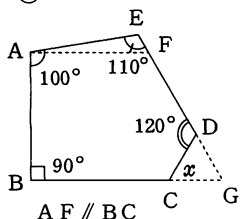


辺BCと辺EDの延長線の交点をFとする。

$\angle CDF = 60^\circ$  四角形ABFEで  $\angle F = 60^\circ$

$\angle x = 60^\circ$

⑫

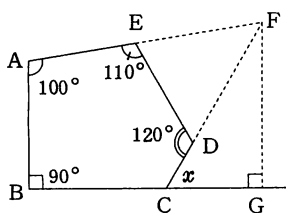


頂点Aを通りBCに平行な直線をひき、辺EDとの交点をFとし、  
BCと辺EDの延長線の交点をGとする。

$\angle EAF = 10^\circ$   $\angle EFA = 60^\circ$   $\angle G = 60^\circ$

$\angle CDG = 60^\circ$   $\angle x = 60^\circ$

⑬



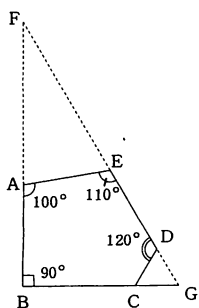
辺AEと辺CDの延長線の交点をF、点Fから辺ABに平行な線をひき  
直線BCとの交点をGとする。

$\angle FED = 70^\circ$   $\angle EDF = 60^\circ$   $\angle EFD = 50^\circ$

四角形ABGFから  $\angle AFG = 80^\circ$   $\angle CFG = 30^\circ$

$\angle G = 90^\circ$   $\angle x = 60^\circ$

⑭



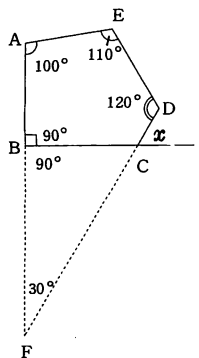
辺AB、辺DEを延長した交点をF、辺BC、辺EDを延長した交点をGとする。

$\angle FAE = 80^\circ$   $\angle AEF = 70^\circ$   $\angle AFE = 30^\circ$

$\triangle FBG$ で  $\angle FBG = 90^\circ$ だから  $\angle CGD = 60^\circ \dots\dots ①$

$\angle CDG = 60^\circ \dots\dots ②$  ①②から  $\angle x = 60^\circ$

⑮



辺ABと辺CDの交点をFとする。

四角形AFDEから  $\angle F = 30^\circ$   $\angle CBF = 90^\circ$

$\angle BCF = 60^\circ$   $\angle x = 60^\circ$

(五島志津子)

題 材 山形の等積変形（２年）

|         |                   |          |
|---------|-------------------|----------|
| 指 導 計 画 | (1) 平行四辺形 .....   | 4 時間     |
|         | (2) 長方形とひし形 ..... | 2 時間     |
|         | (3) 平行線と面積 .....  | 4 時間     |
|         | (4) 問 題 .....     | 2 時間（本時） |

|     |                                                |
|-----|------------------------------------------------|
| 目 標 | (1) 平行線による等積変形を利用して、五角形を面積の等しい三角形に変形する方法を理解する。 |
|     | (2) 七角形、九角形についても類推して等積変形ができることを理解する。           |

授 業 展 開

課 題 1

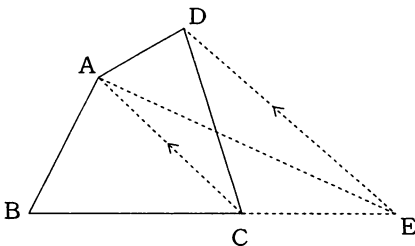
凹九角形A B C D E F G H I と面積の等しい三角形を  
作図したい。

どのように作図すればいいか。

<課題のねらい及び指導上の留意点>

凸四角形を等積変形して三角形にする。この課題は生徒にとっては、それほど難しくない。たとえば右図で、四角形A B C D = △A B E である。次に凸五角形，凸六角形を等積変形して三角形にする問題を考えさせる。この場合、四角形を三角形に変形した方法を

六角形 → 五角形 → 四角形 → 三角形  
と適応させることによって解決することができる。



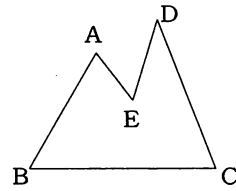
上の課題を提示すると、生徒は「難しそー。」「複雑。」「面倒だな。」と嘆く。しかし、凸 $n$ 角形で、 $(n - 1)$ 角形、 $(n - 2)$ 角形、……四角形と順次、等積変形して解決できたので、次の課題が解決できれば、上の課題も解決できるのではないかと予想する。このような見通しを持たせることが大切である。一見、解決困難な課題であっても、できそうだなと見通しがついたとき、生徒のやる気は、が然違ってくる。

＜指導の流れ＞

〔第1時〕

課 題 2

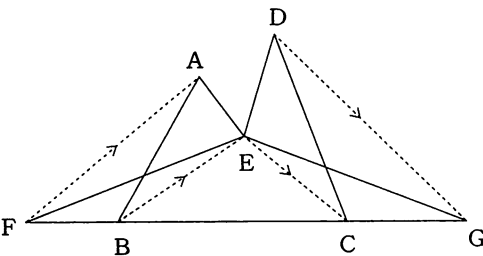
凹五角形 $ABCDE$ と面積の等しい三角形を  
作図したい。  
どのように作図すればいいか。



課題を提示するとき、生徒が興味をもち、イメージをいだきやすいように発問に工夫することが大切である。「ここに2つの山があります。これを1つの山にしてほしい。ただし、面積は等しいままで。」などの発問をする。

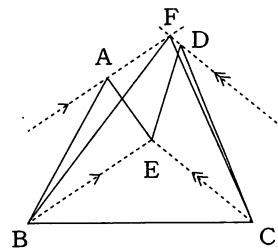
1 山をくずす方法

凹五角形 $ABCDE = \triangle EFG$ である。山  
頂部分をくずして、すそを広げる方法である。



2 山を築く方法

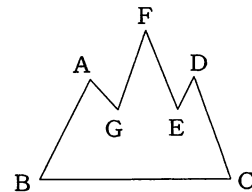
凹五角形 $ABCDE = \triangle FBC$ である。補  
助線として平行線を2本ひくが、その交点に  
着目している。この場合、底辺は変わらない。



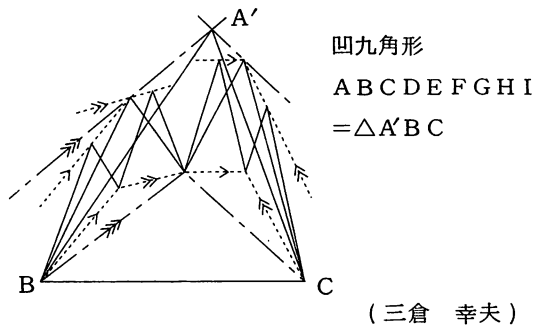
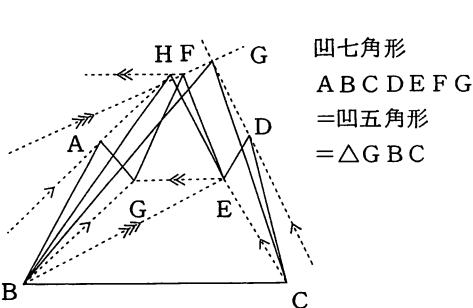
〔第2時〕

課 題 3

凹七角形 $ABCDEFG$ と面積の等しい三角形を  
作図したい。  
どのように作図すればいいか。



課題2の解法を応用するのであるが、2の山を築く方法でないとうまくいかない。



題 材 四角形の各辺の中点を結んでできる図形（中点連結定理の応用）  
（ 2 年 ）

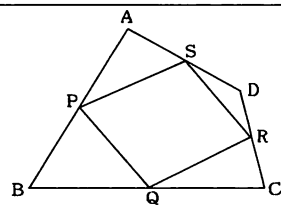
指 導 計 画 (1) 中点についての定理 ..... 4 時間  
(2) 中点についての定理の応用（課題学習） ..... 1 時間（本時）

目 標 (1) 四角形の各辺の中点を結んでできる四角形について，課題を見つける。  
(2) 見つけた課題を解決する。

授 業 展 開

課 題

四角形  $ABCD$  において，各辺  $AB$ ， $BC$ ， $CD$ ， $DA$  の中点をそれぞれ  $P$ ， $Q$ ， $R$ ， $S$  とするとき，四角形  $PQRS$  はどのような四角形になるか。



<課題のねらい及び指導上の留意点>

この授業でのねらいは，四角形  $PQRS$  が四角形  $ABCD$  の形に左右されず，たとえ四角形  $ABCD$  が凹四角形等の場合であっても，平行四辺形であることへの驚きを持たせることを第一の目的としている。好奇心は驚きを持たせてくれる。また，上位グループにはこのような中学校の範囲を越えた場合の個人独自の課題設定による課題学習。中位グループには四角形  $PQRS$  の形状決定の条件の把握。そして，下位グループはもっとも基本的な四角形  $ABCD$  の場合における証明及び四角形  $PQRS$  の平行四辺形の認識である。しかも，この中位，下位グループも各自の到達度に応じた課題設定をねらいとしている。しかし，凸四角形から凹四角形等への移行は，教師が予想する以上の抵抗があり，生徒自身が発見することは不可能に近い。そこでこの移行をスムーズに行うために，コンピューターを利用することにした。

ここでは，まず外側の四角形の形をカーソルキーを用いて，生徒自身が任意に変形する。外側の四角形の形状は，与えられる情報により正確に描くことができるようになっている。この変形により，内部の四角形がどのように変化するか観察し，そして平行四辺形になる理由を考える。そして，考察が進んだ後，対角線及び内部の四角形の各辺，角度の情報を示し，考察を深めていくようになっている。

留意点として，四角形  $PQRS$  が常に平行四辺形になることは大部分の生徒が直感的に認識することは可能であるが，ここで教師が適切なアドバイスをしないとわかったような気持ちになってしまい，それから一歩踏み込んだ，「なぜそうなるのか？」といった疑問をもつ生徒が少なくなってしまう。

シミュレーション形式のソフトの利用の場合、この「わかったような気持ち」には特に注意しなければならない。

また、凸四角形から凹四角形等への移行であるが、単なる形状としては連続して変化するために、移行自体はどの段階の生徒でも容易に可能である。しかし、凹四角形等を凸四角形と同様に考えることに対しては、教師が想像する以上の抵抗がある。ここでも教師の適切な指導が必要である。

さらに、最近の生徒は画面における情報量の大変多いファミコン等に慣れているために、それと比較すると単調な教材表示画面は飽きやすい要素を多分に含んでいる。そのために、時間的にも 10～20 分程度で使用するように心がけなければならない。

### <指導の流れ>

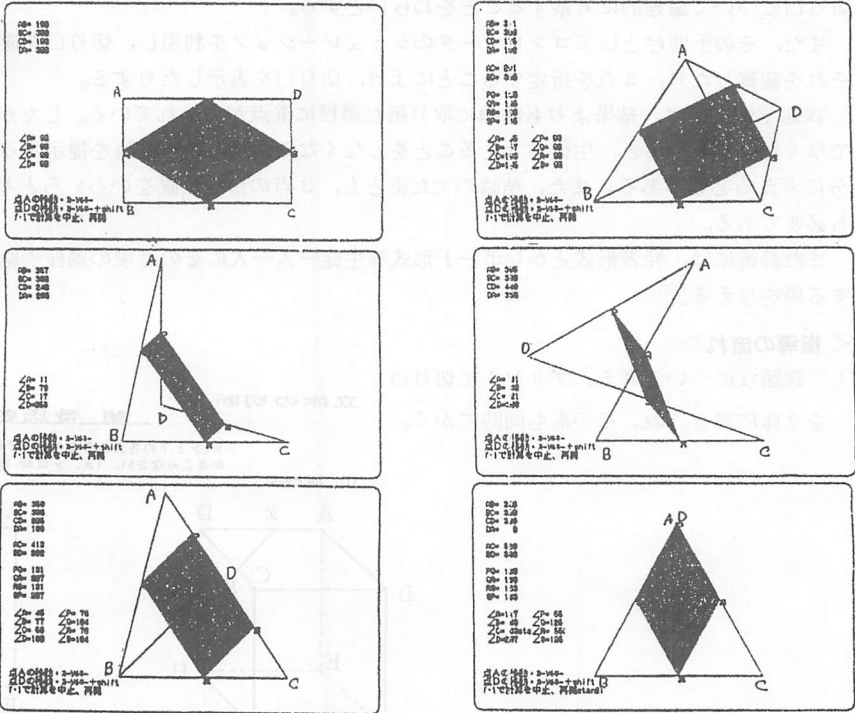
- (1) 問題を示し、結果を予想する。
- (2) コンピューターを用い確認する。
- (3) 各自が興味を持った四角形 ABCD の形について、課題を見つける。

(問題例)

- ① 対角線と辺の関係
- ② 四角形 P Q R S の形状決定の条件
- ③ 四角形 ABCD が凹四角形等の場合の四角形 P Q R S が平行四辺形になる理由等

- (4) 課題を解決する。

### <参考資料>



(香川 朗)

# 材 立体の切断のいろいろ（３年）

|      |                                 |
|------|---------------------------------|
| 指導計画 | (1) 立体の切断 ..... 1 時間            |
|      | (2) 立体の切断のいろいろ（課題学習） ..... 2 時間 |

- 目 標
- (1) 立方体をとり合う 2 辺の中点を通る平面で切ったときの切り口の形とその変化をイメージとしてとらえることができる。
  - (2) 立体の切り口を論理的に考え整理することができる。

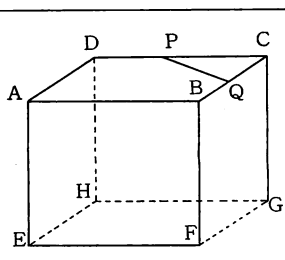
## 授業展開

〔第 1 時〕

### 課 題

右の図の立方体を辺 CD, BC のそれぞれの中点 P, Q を通る平面  
 できるものとして次の問いに答えなさい。

- ① 他の 1 点が CG, GF, FE, EA 上にあるとき切り口はそれぞれ  
 どんな形になるか。



### < 課題のねらい及び指導上の留意点 >

立体の切り口をいろいろとつくるだけでなく、平面の決定条件や 2 直線の位置関係などに関係づけ、  
 切り口について論理的に考察することをねらいとする。

また、その手助けとしてコンピュータのシミュレーションを利用し、切り口を連続的に変化させ、  
 それを観察したり、3 点を指定することにより、切り口を表示したりする。

課題学習には、結果よりも課題に取り組む過程に重点がおかれている。したがってコンピュータ  
 で早く結果をみせると、生徒が考えることをしなくなるため、いつ結論を提示するかということをも  
 十分に考える必要がある。また、結論のたあとも、3 点の指定位置をいろいろと考えさせてみるこ  
 とも必要である。

また最後には、発表形式とかレポート形式等生徒一人一人にその追求の過程や結果を論理的に整理  
 する場を与える。

### < 指導の流れ >

- 1 課題 ① について考え、プリントに切り口  
 を立体に書き入れ、その形も同時にかく。

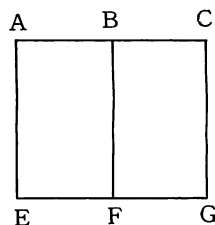
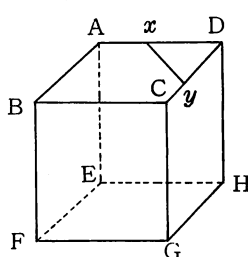
### 立体の切断 3

CP 177/73

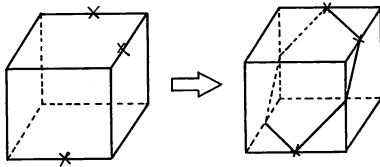
組 員 氏 名

x, y と下の各点の 3 点を通る平面で切断したときの切り口を  
 かきこみなさい。(x, y は AB, CD の中点)

(1) 上の点

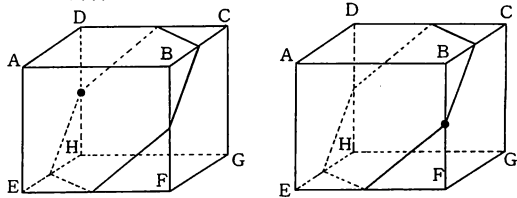


2 コンピュータに3点を指定し、切り口を表示させ、間違いを訂正し、自分の考えとの違いについて考える。



切断点は、矢印キーでマークを動かしたり  
ターンキー指定する。  
3点指定すると切断面が表示される。

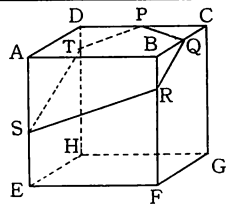
3 五角形、六角形について、同じ切り口をつくる場合、  
例題と違う他の1点をみつける。



〔第2時〕

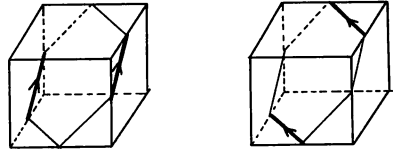
課題

② 図は切り口が五角形の場合を示しているが、QRとTS、PTとRSはそれぞれどんな関係にあるといえるか。



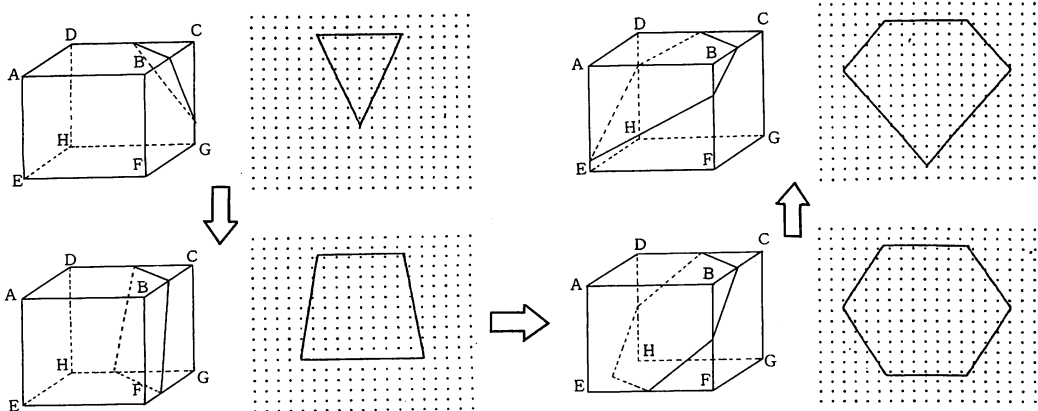
1 課題②について考える。いずれの組の直線も「同一平面上にあって交わらない2直線は平行である」とことと関連づけて考える。

また、3点を指定すると平面が決定することも、平面の決定条件を思いだし、関連づける。



2 他の切り方で切り口が正三角形、正方形、長方形になる場合、どのように切断すればよいかについて考える。

3 切り口を連続的に変化する様子を観察し、その変化をイメージとしてとらえると同時に論理的に考える。



4 3角形から6角形まで、どの3点をとればよいかについてまとめる。

(大下 経幸)

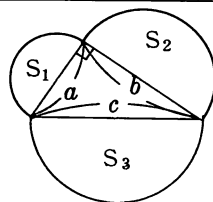
## 題 材 直角三角形のまわりにできる図形の面積（３年）

- 目 標
- (1) 三平方の定理を面積の関係としてとらえ、直角三角形の各辺上に立つ正方形の面積の関係が、他の図形でも成り立つかどうかを既習事項を活用して、調べることができる。
  - (2) いろいろな図形を自ら設定して、主体的に取り組むことができる。

### 授 業 展 開

#### 課 題

直角三角形の各辺上の半円の面積、 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  の関係を調べよう。



#### <課題のねらい及び指導上の留意点>

三平方の定理の学習は、中学数学の中でも特に有名で重要な学習である。幾何学的要素と代数的要素が統合され、数学の見事さ・美しさが味わえる中学数学のまとめともいえる題材で、発展性も多様である。

本時は、三平方の定理を面積の関係としてとらえ、直角三角形の各辺上に立つ正方形の面積の関係を、他の図形の面積に発展させる授業である。まず、教師が課題として半円を与え、面積を求めさせる。 $S_1 + S_2 = S_3$  が成り立つことに、驚きを感じるにちがいない。さらに、それ以外の図形（正三角形、直角三角形、長方形など）について、個々に問題作りをさせ、三平方の定理など既習事項を活用して調べさせる。この段階では、自分の作った問題を解くので、意欲的に取り組めるだろう。個人差も大きいので、教師は机間巡視を充実し、個別指導も大切である。また、グループ学習を仕組むことも可能であろう。

最終的には、相似な図形ならすべて、 $S_1 + S_2 = S_3$  が成り立つことをおさえ、数学のおもしろさ、美しさ、発展性を味わわすことができればと思う。

#### <指導の流れ>

- 1 三平方の定理を復習させる。
  - ・ 三平方の定理を思い出させ、正方形の面積の和として考えられることを確認させる。
- 2 課題を提示し、結果を予想させる。
  - ・ 問題をプリントしたものを配布し、 $S_1 + S_2 = S_3$  になるかならないかについて意識を持たせる。

3 課題を解決させ、結果を発表させる。

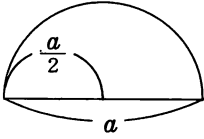
- $a = 3, b = 4, c = 5$  として考えさせてもよい。

$$S_1 \text{ の面積 } \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} a^2$$

$$\text{同様に } S_2 = \frac{\pi}{8} b^2, \quad S_3 = \frac{\pi}{8} c^2$$

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{8} a^2 + \frac{\pi}{8} b^2 = \frac{\pi}{8} (a^2 + b^2)$$

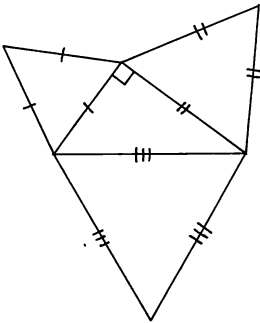
$$(a^2 + b^2 = c^2 \text{ より}) \quad = \frac{\pi}{8} c^2 = S_3$$



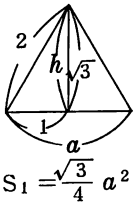
4 いろいろな図形で調べさせる。

- 生徒の発想を大切にし、意欲的に取り組ませたい。
- 机間巡視をし、行きつまった生徒にはアドバイスを与える。  
(ヒントカードを準備しておいてもよい。)

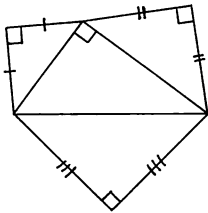
$S_1 + S_2 = S_3$  となり、生徒から出やすい例



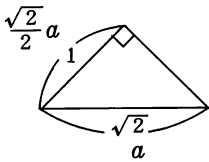
正三角形



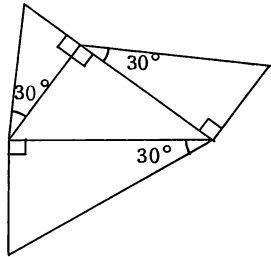
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



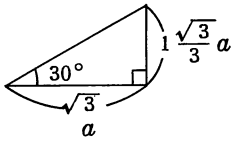
直角二等辺三角形



$$S_1 = \frac{1}{4} a^2$$



30°, 60° の直角三角形



$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2$$

5 結果を発表させる。

- $S_1 + S_2 = S_3$  となるもの、ならないものに分けさせる。
- 相似な図形なら、成り立つことを発見させる。
- 授業中にまとめす、もっといろいろな場合について調べさせ、レポートを出させてもよい。

(湯藤 義文)

## 題 材 マッチ棒でできる三角形の面積（３年）

|         |                    |      |
|---------|--------------------|------|
| 指 導 計 画 | (1) 三平方の定理……………    | 5 時間 |
|         | (2) 三平方の定理の利用…………… | 6 時間 |
|         | (3) 課 題 学 習……………   | 1 時間 |

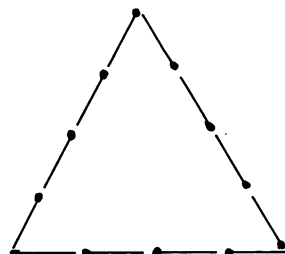
|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| 目 標 | (1) 三平方の定理を使って三角形の面積を求めることができる。   |
|     | (2) 平方根の大小、近似値を求めることができる。         |
|     | (3) 自らの力で課題を解決し、数学のおもしろさ、楽しさを味わう。 |

## 授 業 展 開

### 〔第１時〕

#### 課 題

長さが等しい、12本のマッチ棒を使い、三角形を作ります。  
このとき、三角形の面積が最も大きくなる三角形は、どんな三角形ですか。



### <課題のねらい及び指導上の留意点>

課題学習においてもっとも重要なことは、生徒が課題を見たとき、自己の問題として意識できるかどうかであると思う。すなわち、「難しそうだ。しかし、おもしろそうだからやってみよう。」と感じさせることだと思う。そのためには、課題は生徒の身近な内容であるとともに、興味を持つ内容であることが望まれる。本課題は、ゲーム（クイズ）的要素を含んでいるので、生徒に意欲を持たせ、生き生きと課題解決に取り組ませることができると考えた。

本課題を提示するときは、生徒に多様な考えをさせるために、三角形の図は省略するほうがよいと考える。また、生徒たちの思考を助けるためにマッチ棒や、教授用として長さの等しい12本の竹を紐にとおしたものなどを用意しておくといよい。本課題の解決には、次のような学習内容が含まれている。

- ① 三角形ができる場合を落ち度なく数えることができる。
- ② 与えられている2辺を使い、直角三角形に分解できる。
- ③ 三平方の定理を利用して長さを求めることができる。
- ④ 特殊な三角形の辺の比と相似を使って辺の長さを求めることができる。
- ⑤ 平方根の大小を求めることができる。
- ⑥ 平方根表が利用することができる。

以上の本課題は、総合的課題である。

＜指導の流れ＞

- 1 課題の確認をする。問題をプリントしたものを配布する。
- 2 個人で問題を解決していく。

① 12本のマッチ棒を使い、三角形になる場合を考える。

(方法) ア マッチ棒12本を使い、操作させる。

イ 3辺を表に書いて数える。

(結果) { 2, 5, 5 } { 3, 4, 5 } { 4, 4, 4 }

② 結果の3組について面積を求める。

・ { 2, 5, 5 } の三角形について (図1)

できた三角形は、二等辺三角形になる。二等辺三角形の性質より、頂点からの垂線は底辺を二等分する。高さを $h$ とすると、

$h^2 + 1^2 = 5^2 \qquad h = 2\sqrt{6}$

(面積)  $2 \times 2\sqrt{6} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{6}$

・ { 3, 4, 5 } の三角形について (図2)

三平方の定理の逆の定理よりできた三角形は、直角三角形である。よって高さは3か4である。

(面積)  $3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$

・ { 4, 4, 4 } の三角形について (図3)

できた三角形は、正三角形である。高さを $h$ とすると

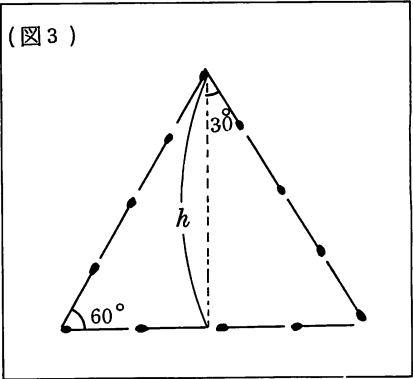
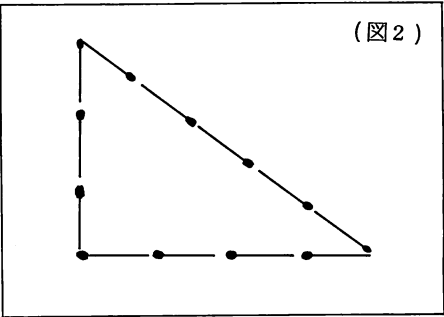
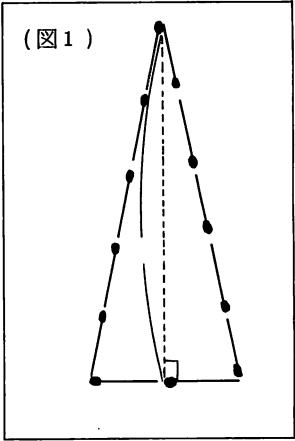
ア 三平方の定理より

$h^2 + 2^2 = 4^2 \qquad h = 2\sqrt{3}$

イ 3辺の比 1 : 2 :  $\sqrt{3}$  より

$\sqrt{3} : h = 2 : 4 \qquad h = 2\sqrt{3}$

(面積)  $4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$



③ 3組の面積の大小を判断する。

ア 大小関係より求める。(2乗する)

$(2\sqrt{6})^2 \dots\dots\dots 24$

$6^2 \dots\dots\dots 36$

$(4\sqrt{3})^2 \dots\dots\dots 48$

イ 平方根の近似値を求める。

$2\sqrt{6} = 2 \times 2.449$

$4\sqrt{3} = 4 \times 1.732$

3 結果を発表する。

- ・ OHPなどを使い発表する。
- ・ いろいろな解き方をプリントにして配布する。

(鹿児島厚史)

題 材 ビリヤードの玉の軌跡（図形の計量）（3年）

指 導 計 画 (1) 問題を解く…………… 1 時間

目 標 (1) 一つの問題であっても、考え方により様々な解き方ができることを知る。  
(2) 三平方の定理の理解を深め、利用する。

授 業 展 開

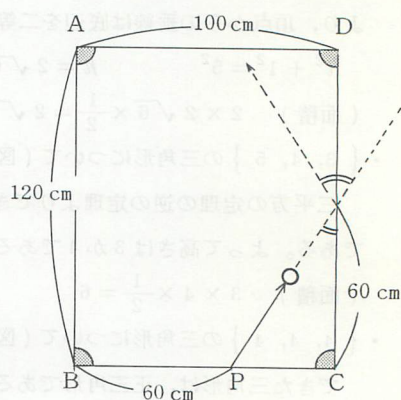
課 題

右の図のようなビリヤード台がある。今、点Pより玉を矢印の方向に突いた。次の問いに答えなさい。

ただし、側面にぶつかった玉は正しく反射して行くものとする。

(1) 玉の動いた軌跡を書き、どのコーナーに玉が入るか求めなさい。

(2) 点Pからコーナーまでの動いた距離を求めなさい。



<課題のねらい及び指導上の留意点>

出題時期としては、3年の図形の計量終了後に利用問題として出題したい。

この課題のねらいとしては、一つの解き方にとらわれるのではなく、生徒自らがそれぞれの能力に応じた様々な解法を考え出し、解くことができることをねらいとしている。

問(1)については、小学校の理科で習った反射の考え方をもとに作図により解く方法や、線対称や相似形の考え方を利用する解法、また、関数的に考える方法なども考えられる。

問(2)については、三平方の定理の利用が基本となるが、単に三平方により解くものと、相似比を活用する解法などが考えられる。しかし、これらの解法は一部であり、その他にも多様な考え方を利用することができるものと思われる。

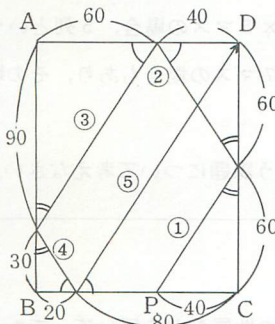
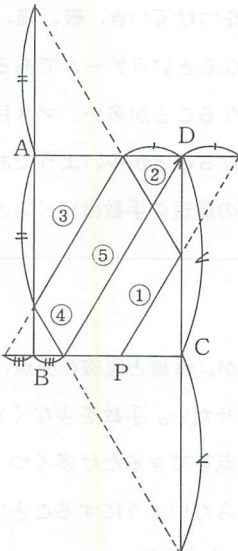
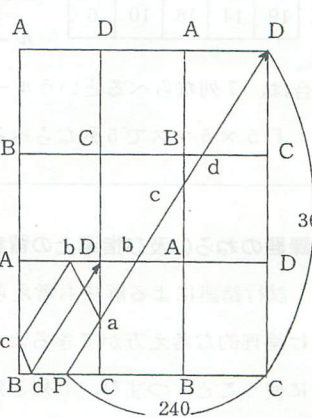
留意点としては、各生徒が自分の能力に合わせた解き方を見つけ出して取り組めるよう指導したい。この時、十分考えても解き方が思いつかない生徒に対しては個別に生徒の能力を考え適切な助言を行うことが大切である。また、一つの解法により解いてしまった生徒に対しては別の解法がないかを考えさせることも大切である。

<指導の流れ>

- 1 課題を提示する。(反射の仕方を確認しておく)
- 2 解き方を予想させる。

三平方の定理は利用するものとして、それ以外に次の(1)~(3)を併用する。

(1) 反射と作図を利用      (2) 線対称と相似形を利用      (3) 線対称を利用
- 3 自分の力で課題を解決させる。

| 反 射 と 作 図 を 利 用                                                                                                                        | 線 対 称 と 相 似 形 を 利 用                                                                                                             | 線 対 称 を 利 用                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>問(1)について</p> <p>◦ 分度器を用いて次々と反射する位置を求め、作図していく。</p>  | <p>◦ 側面に当たった後も延長し、線対称に移動して次の側面との交点を見つける。</p>  | <p>◦ 線対称の考え方を発展させ、面を対称に並べ最初の方角を延長することにより、各面との交点を見つける。</p>  |
| <p>問(2)について</p> <p>◦ ①~⑤それぞれを斜辺とする直角三角形について三平方の定理を用い、①~⑤の長さを求め、加える。</p> <p>◦ 三角形の合同を利用することにより ⑤=①+②=③+④に気がつけば、⑤の長さを求めて3倍する。</p>        | <p>◦ ①~⑤を斜辺とする直角三角形はすべて相似形であるため、①の長さを求めて、相似比により①~⑤の長さを求め、加える。</p>                                                               | <p>◦ 点Pよりコーナーとの交点Dまでを斜辺とする直角三角形において三平方の定理を用いて求める。</p> $\sqrt{240^2 + 360^2} = 120 \sqrt{13} \text{ cm}$                                       |

(猪谷 正治)

## 題 材 ビンゴゲーム（３年）

- 目 標
- (1) 身近な興味ある問題に取り組むことにより、数学を学習する意欲を持ち、自ら新しい課題をみだし、主体的に取り組む態度を養う。
  - (2) 数学的な見方、考え方のよさを体験するとともに、それを活用する能力を養う。

## 授 業 展 開

### 課 題

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 8  | 21 | 4  | 17 | 7  |
| 9  | 12 | 22 | 11 | 1  |
| 23 | 3  | 16 | 25 | 20 |
| 5  | 13 | 24 | 2  | 15 |
| 19 | 14 | 18 | 10 | 6  |

生徒が休み時間によくやっている遊びに「ビンゴゲーム」というのがある。複数の者が、それぞれ、図のようなマス目をつくり、各々がランダムに1～25の数を入れる。1人が1つずつ数を言い、全員がその数に印をつけていき、縦、横、斜めに規定の数だけ列のなった者が勝者となるというゲームである。（5×5マスの場合、5列というルールになることが多い。マス目は7×7マスの場合もあり、その場合は、7列ならべるというルールになることが多いようである。

『5×5マスで5列ならべるときの最短の手数はいくらか。』という課題について考えなさい。

### <課題のねらい及び指導上の留意点>

- (1) 試行錯誤による解決も考えられるが、直線と直線の交点、平行線の性質などを用いて、できるだけ論理的な考え方ができるようにさせたい。手数を少なくするポイントは、1手をできるだけ有効に使うこと、つまり、「列と列の交点をできるだけ多くつくること」である。そのためには、列と列とが同じ点で3重、4重にかさならないようにすることである。

以上の点に気づかせ、論理的思考につなげたい。

- (2) 身近な問題に取り組むことにより、自主的に新しい課題を見つけさせたい。新しい課題としては、次のものが考えられる。

- a 勝利までの最長手数はいくらか。
- b マス目を増やすとどうなるか。（6×6マス、7×7マス、……）
- c ならぶ列の数を変えるとどうなるか。
- d 自分にとって有利にすすめるための戦略を考える。

等である。

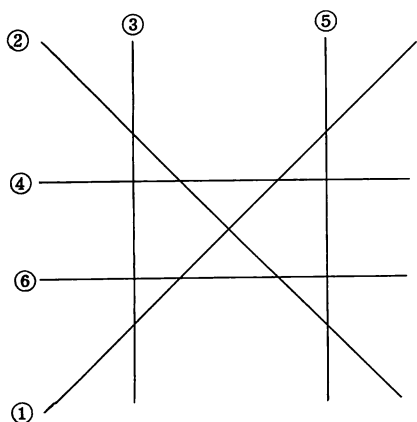
(3) 問題をあまり複雑にしないためには、

a マス目の行数は奇数か偶数か、どちらかに決めておく。

b マス目の行数 $\geq$ ならぶ列の数 と決めておく。

方が良いと思われる。

(4)  $n \times n$ マスで、 $n$ は奇数、マスの行数 $\geq$ ならぶ列の数という場合、次のように考えられる。(図は、マス目は省略、実線はならんだ列)



○内の数は、その列をつくる時に新たにできた交点の数であり、以下、2列増えるごとに、○の数は1ずつ増加する。

| 列の番号 | その列をつくるための手数 | そこまでの手数の合計 |
|------|--------------|------------|
| ①    | $n$          | $n$        |
| ②    | $n - 1$      | $2n - 1$   |
| ③    | $n - 2$      | $3n - 3$   |
| ④    | $n - 3$      | $4n - 6$   |
| ⑤    | $n - 3$      | $5n - 9$   |
| ⑥    | $n - 4$      | $6n - 13$  |
| ⑦    | $n - 4$      | $7n - 17$  |
| ⑧    | $n - 5$      | $8n - 22$  |
| ⑨    | $n - 5$      | $9n - 27$  |

#### <指導の流れ>

- (1) 課題を提示する。
- (2) グループごとに、課題を解決させる。
- (3) 結果と考え方を発表させる。
- (4) グループごとに、新しい課題を見つけ出させ、解決させる。
- (5) グループごとの課題と結果、考え方を発表させる。

(木下 隆司)

## 題 材 ミツバチは、なぜ正六角形の巣を作るのか（３年）

- 目 標
- (1) 文字を使って、式を作る。
  - (2) 三平方の定理を使って、正三角形の面積を求められる。
  - (3) 日常世界を、数学的な見方・考え方で考えることのよさ・楽しさ・美しさに気づく。
  - (4) 平方根の近似値が利用できる。

## 授 業 展 開

### 課 題

ミツバチは、なぜ正六角形の巣を作るのか。

### <課題のねらい及び指導上の留意点>

- ① ねらい 課題自身のもつ意外性から、生徒の意欲的な取り組みが期待できると思いこの課題を取り上げた。自然の中で生きるミツバチが、なぜあんなに正確に正六角形の巣を作っていくかを考えるには、論理的思考が必要となってくる。“正三角形でもよかったのでは？”と問うことにより、正方形でもいいのではという考えもでてくるだろう。班で話し合うことにより、ミツバチが、正六角形を選ぶ理由も推論できると思われる。
- ② 留意点 ミツバチも子どもをなるべく広い所で育てたいだろう。すき間があると他の虫が侵入してくる。また、巣づくりにかける労力もできるだけ少なくしたい。と考えていくと、“接続部分が少なく、面積が最も大きく、すき間のない図形”ということになる。

それでは、今までにいたる考えが正しいかどうか証明しようということで、導入していく。周の長さを $a$ とする時に、それぞれの図形の面積を求めさせるが、ここで、三平方の定理を使う場面がうまれてくる。また、周の長さを文字で表すことにより、文字式を使う力がついているかどうかわかるし、復習にもなる。五角形の面積では、コンピュータの利用も考えられる。

話し合う場面ではグループ学習でお互いの考えを出させたい。証明していく場合では、個別に取り組ませ、おくれがちな生徒には個別指導もしていきたい。

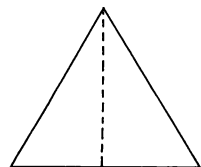
証明がおわり、正六角形が一番、ミツバチの要求にかなっているということがわかった時、日常生活の中にも、数学が生きているということに生徒は驚き、感動するであろう。

### <指導の流れ>

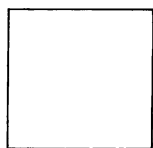
- 1 課題を提示する。
  - ヒントを与えて、解決の方向をつかませ、方法を発表させる。班で話し合わせる。
    - ・ミツバチは、なぜ正六角形の巣を作るのか。
    - ・合同な多角形の組みあわせと考えられる。

- ・合同な多角形で、すき間なく敷きつめられるのは？
- ・三角形，四角形，五角形，六角形
- ・ミツバチの作業能力から考えて，接続部分が少なく，面積が最も大きいのがよい。
- ・4つの多角形のうち，周の長さが最小で面積が最大の多角形はどれか。
- ・周の長さを同じにした時，4つの多角形の面積を求め，比較してみよう。

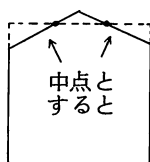
2 周の長さを $a$ とした時の4つの多角形の面積を求めさせる。



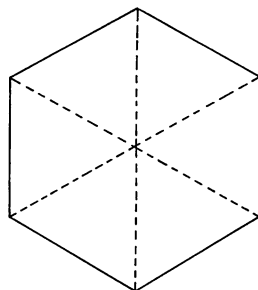
$$\begin{aligned} \text{底辺} & \frac{a}{3} \\ \text{高さ} & \frac{\sqrt{3}}{6} a \\ \text{面積} & \frac{a}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6} a \times \frac{1}{2} \\ & = \frac{\sqrt{3}}{36} a^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{一辺} & \frac{a}{4} \\ \text{面積} & \frac{a}{4} \times \frac{a}{4} \\ & = \frac{a^2}{16} \end{aligned}$$



上記の図では，  
正方形と面積は  
同じだが，周囲  
は長くなる。



$$\begin{aligned} \text{一辺} & \frac{a}{6} \\ \text{面積} & \frac{\sqrt{3}}{24} a^2 \end{aligned}$$

- 三平方の定理を利用して，高さを求めさせて，面積を考えさせる。
- 五角形については，いろんな形が考えられるが，ここでは，上記の形としておいて，時間があれば，コンピューターを利用して，面積が最大の五角形について教えるとよい。

3 4つの多角形の面積を比較させる。

- 電卓を使って $a^2$ の係数を比較させる。

$\sqrt{3} = 1.732$ で計算すると

正三角形……………0.0481

正方形……………0.0625

五角形……………0.0625よりは少ない。(上のような形では)

正六角形……………0.0722……………最大である。

<参考> ホームベース形の五角形では

周囲の長さを10とすると，縦2.1256，横2.6603，斜辺1.54425の時，面積6.69820990

(最大値)

4 結果を発表させる。

- 課題を発展させたものを提示する。

発展1 周の長さが一定である時，正方形，長方形，円ではどの面積が一番大きいのか。

発展2 五角形の面積について(ホームベースの形)

周囲の長さが一定である時，いろいろな形の五角形を考え，その面積を求めてみよう。

<参考>参照

(猪井 淑子)

## 題 材 模様面積・長さ（３年）

|         |                             |
|---------|-----------------------------|
| 指 導 計 画 | (1) 作図をし，課題を見つける。…………… 1 時間 |
|         | (2) 課題の解決・発表…………… 1 時間      |

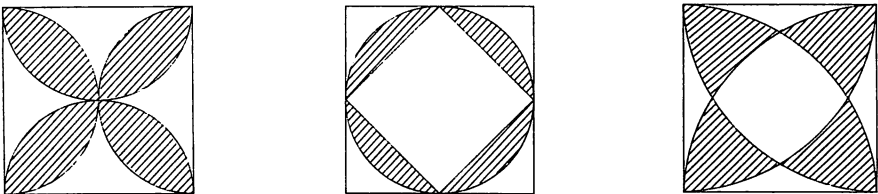
|     |                             |
|-----|-----------------------------|
| 目 標 | (1) 定規・コンパスを使うことの楽しさを味わう。   |
|     | (2) 既習の知識を自分の課題に利用することを考える。 |
|     | (3) 問題解決の仕方の多様さを学ぶ。         |

## 授 業 展 開

課 題

定規とコンパスを使って模様を書き，長さや面積を調べよう。

(例)



### <課題のねらい及び指導上の留意点>

#### ○ ね ら い

定規とコンパスを使い，自分で工夫して模様を作り，その作業を通してできる図形について，長さや面積を求める課題を自分で見つけ，それまでに学習した図形の性質を利用して，多様な仕方で解決することをねらいとする。

#### ○ 留 意 点

模様を書く際に，例えば一辺 10 cm の正方形を基にするというふうに一定の約束事を決めておく  
と他の生徒との比較・対照もできて都合がよい。また模様から表れる図形についての課題は，自力  
で解決を図るようにする。それによって，各自の力に相応した問題が得られるし，問題作成・問題  
定式化を通して生徒の力を発展させることが期待される。これまでに合同・相似な図形，三角形・  
多角形・円の性質，三平方の定理，扇形の弧の長さや面積について学習しているので，それらを充  
分に活用して問題の解決に取り組ませる。

### <指導の流れ>

- (1) 定規とコンパスを用意させ，課題の場面について説明する。始める前に生徒との約束事を決めておく。

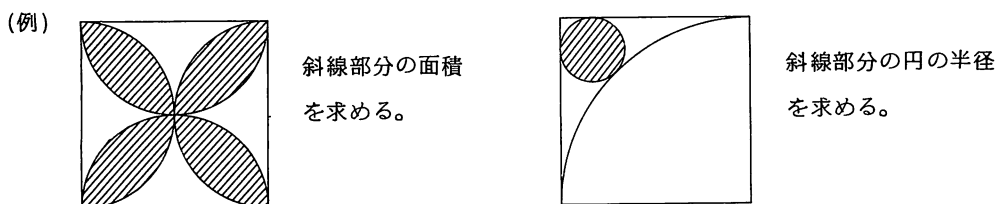
・一辺 10 cm の正方形を基にして，そこからいろいろの模様を作ること。

・各自が作った模様から、図形についての長さや面積を求める課題を自分で作ること。

・作った問題を解決する。その際、解決の方法をいろいろ考えること。

(2) 生徒からの質問をきき、説明を補足しながら答える。必要なら、約束事を変更したり、追加したりする。

(3) 生徒が個別に作業を行う。はじめに定規とコンパスを使って模様作りを行う。ついで、長さ・面積に関する自分の課題の作成に移る。



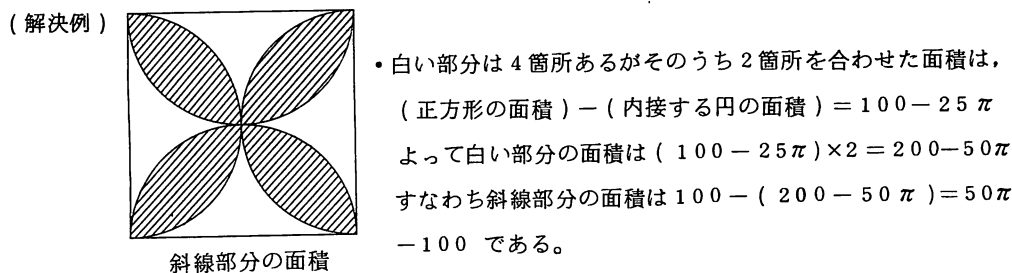
(4) 各自が、どんな模様をかいたか、どのような課題に取り組んでいるか中間発表をする。

・それまでに書いた模様を示し、各自の課題を提示する。

・解決方法や結果の予想についての意見等があればそれをきく。

・同じかまたは似た問題を作成した生徒同士を知り、必要なときの相談相手とする。

(5) 個別に、各自が作成した問題を解決する。できれば複数の方法で解決をするように工夫をする。



(6) 各自の作った模様は展示会を開いて発表の機会とする。各自の課題とその解決については発表の時間をとり、どういうふうに進めたか、得られた結果について全員発表する。

・発表の際、解決方法の工夫に留意するとともに、その方法の共通点や相違点について討議する時間をとり、方法の練り上げを行う。

(7) 各自がどのような模様をかいたか、また、どのような課題を作り、解決したかを中心に評価する。特に、得られた結果とともに、どういう取り組み方をしたかを重視する。

(発展)

(8) 一辺 10 cm の正方形を基にするという制限をとり払い、正三角形や平行四辺形を基にする場合などいろいろな問題へと発展させてゆく。

(9) 最終的には全く自由に定規とコンパスで模様を作り考察することを考える。

(内田 清文)

## 題 材 たし算の三角関係・四角関係（３年）

|         |                           |
|---------|---------------------------|
| 指 導 計 画 | (1) 連立方程式……………第２学年において既習  |
|         | (2) 円の性質（円と直線）……………６時間    |
|         | (3) たし算の三角関係・四角関係……………２時間 |

|     |                                                     |
|-----|-----------------------------------------------------|
| 目 標 | (1) 自分の能力に応じて問題を解決する。                               |
|     | (2) 既習の内容と関連させながら、一つの問題を多様な方向からとらえ、発展させ、自分で課題を見つける。 |

## 授 業 展 開

（以下、第１時及び第２時をまとめて示す。）

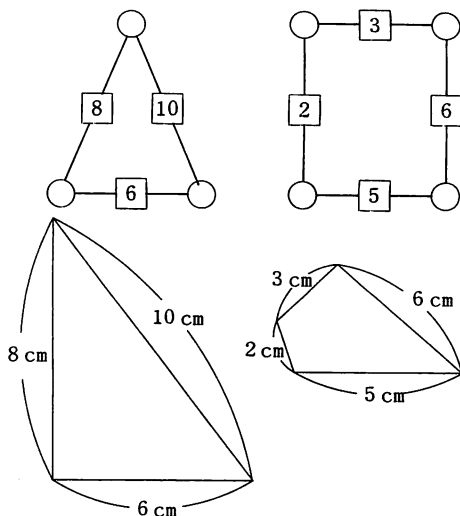
### 課 題

- (1) 右の図の○に適当な数を入れてみよう。

ただし、図④—③—⑥で、 $a + b = c$  となるようにしなければならない。

次に、自分で□の中の数を変えて問題をつくり、○にあてはまる数を求めてみよう。

- (2) 上の問題と右の図を比べてみよう。何か気がつくことはないだろうか。(1)の図の○にあてはまる数は、右の図では何を表しているのだろう。



### <指導のねらい及び指導上の留意点>

この問題は、小学校２・３年の計算力があれば試行錯誤により解くことが可能である。したがって、すべての生徒が自分なりに取り組むことができ、自分なりに解き方を工夫することができる。いきあたりばったりに思いついた数をあてはめる。０から順にあてはめていく。表をつくる。など、試行錯誤による方法にもいろいろある。あてはめていくうちに、何らかの規則性に気づく者もいるだろう。

また、○の中に文字をあてはめ、方程式や連立方程式を用いて問題の構造を文字で表すことによって、三角形の場合はすぐに解が見つかる。四角形の場合は□にあてはめる数により、解が不定であったり、解がなかったりすることも文字を用いると証明できることをわからせたい。

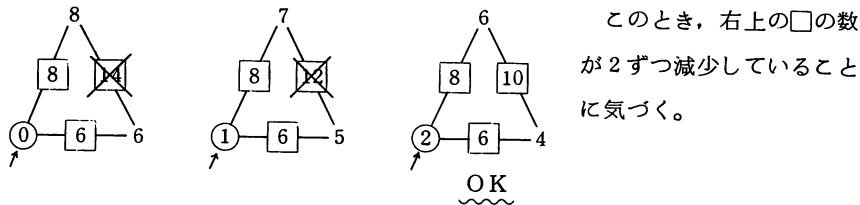
そして、(2)の図と比べ、円に外接する三角形、四角形との関連に気づかせ、この代数的な問題には、図形的な一面もあることに注目させる。そうすれば四角形の場合の解の不定性や不能性が視覚的にとらえられ、より理解が深まる者もいるであろう。

このようにしてこの問題に生徒一人一人が、多様な方向からアプローチし、他の意見も参考にしながら自分なりに取り組んでいくうちに、数学的な見方や考え方が少しでも身につくことを期待したい。

<指導の流れ>

- 1 課題(1)を提示する。
- 2 各自に考えさせる。
- 3 グループで話し合う。
- 4 考えを発表させる。まず三角形、次に四角形。

(解答例)① 左下の○に0から(1から)あてはめていく。



(あてはめて解く場合、「解が1とおりにしかない」ことがわかりにくいことにも注意する。)

②

左図のように  $x, y, z$  とおいて連立方程式をつくる。

$$\begin{cases} x + y = 8 \cdots \cdots ① \\ y + z = 6 \cdots \cdots ② \\ z + x = 10 \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

①+②+③より  $x + y + z = 12 \cdots \cdots ④$   
④と①, ②, ③を使うと楽に計算できる。

(このように文字の式を使うと、解の一意性がわかりやすい。)

③

左図のように  $x$  をおき、  
 $(8 - x) + (10 - x) = 6$  を解く。

④ □の中の数を変える場合、数の範囲をどうするか決めておく。

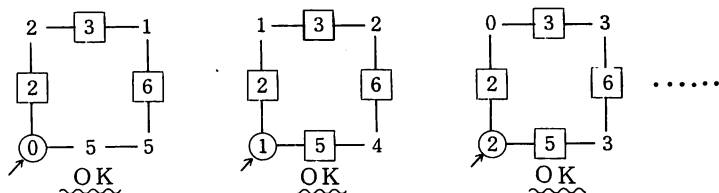
自然数、整数、有理数、実数(どんな数でもよい)

どんな数であっても下のように□を  $a, b, c$  とすると、

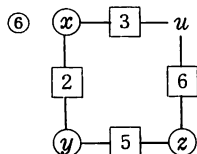
$$x = \frac{a - b + c}{2}, \quad y = \frac{a + b - c}{2}, \quad z = \frac{-a + b + c}{2}$$

三角形の場合、□にどんな数をあてはめても必ず○にあてはまる数があることがこれで証明できた。

⑤ 四角形でも①と同じようにあてはめてみる。

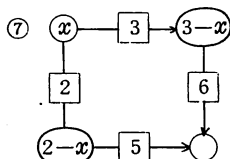


1つの○の中にどんな数をあてはめても必ず他の3つの解も見つかる。



左図のように  $x, y, z, u$  において連立方程式をつくる。

$$\begin{cases} x+y=2 \cdots \cdots ① & ①-②より \quad x-z=-3 \\ y+z=5 \cdots \cdots ② & ④-③より \quad x-z=-3 \\ z+u=6 \cdots \cdots ③ & \text{となり、解は不定である。} \\ u+x=3 \cdots \cdots ④ \end{cases}$$

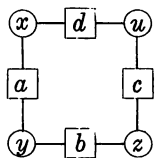


左図のように  $x$  とおくと、右下の○は

$$6 - (3 - x) = 3 + x$$

$5 - (2 - x) = 3 + x$  となり、 $x$  がどんな数でも成り立つ。

⑧ □内の数を変えた時、下図のように  $a, b, c, d$  とおくと、



$$\begin{cases} x+y=a \cdots \cdots ① & ①+③より \quad x+y+z+u=a+c \\ y+z=b \cdots \cdots ② & ②+④より \quad x+y+z+u=b+d \\ z+u=c \cdots \cdots ③ & \text{となり、} \underline{a+c=b+d} \text{ でないと解が存在しない。} \\ u+x=d \cdots \cdots ④ \end{cases}$$

もし  $a+c=b+d$  であれば、例と同様に解は不定である。

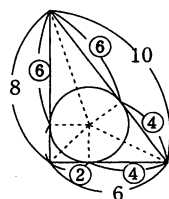
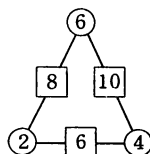
5 課題(2)について考える。これは、教師の側からかなりのヒントを与える必要があるかもしれない。

円の接線についての定理を確認する。

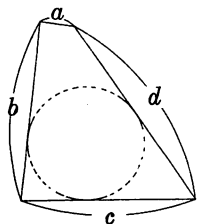
- 円外の点から、この円にひいた接線の長さは等しい。
- どんな三角形でも、その3つの辺に接する円がある。

このことから、□内の数で三角形が構成できる場合は、

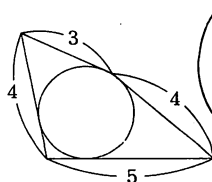
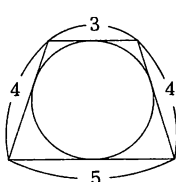
④で述べたことが視覚的に確かめられる。



四角形については、内接円を持つ条件として、⑧で述べたことから  $a+c=b+d$  であることが必要十分条件であることがいえる。また、四角形は4辺の長さが決まっても、その形は不定なので、⑤～⑦で述べたことも視覚的に確かめられる。



$(a+c \neq b+d)$   
内接円を持たない



(四角形の形が  
変わると接線の  
長さも変わる)

(宮本 淳子)

## 編集にたずさわった人

界。

谷

津

(五十音順)